N. NIELSEN

HANDBUCH DER THEORIE

DER GAMMAFUNKTION

P. P.

Meinen umfangreichen Verlag auf dem Gebiete der **Mathematischen**, der **Technischen** und **Naturwissenschaften** nach allen Richtungen hin weiter auszubauen, ist mein stetes durch das Vertrauen und Wohlwollen zahlreicher hervorragender Vertreter obiger Gebiete von Erfolg begleitetes Bemühen, wie mein Verlagskatalog zeigt, und ich hoffe, daß bei gleicher Unterstützung seitens der Gelehrten und Schulmänner des In- und Auslandes auch meine weiteren Unternehmungen Lehrenden und Lernenden in Wissenschaft und Schule jederzeit förderlich sein werden. **Verlagsanerbieten** gediegener Arbeiten auf einschlägigem Gebiete werden mir deshalb, wenn auch schon gleiche oder ähnliche Werke über denselben Gegenstand in meinem Verlage erschienen sind, stets sehr willkommen sein.

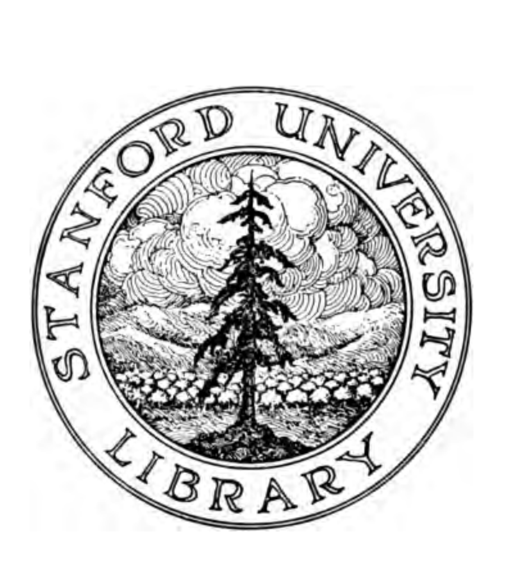
Unter meinen zahlreichen Unternehmungen mache ich ganz besonders auf die von den Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München und Wien herausgegebene **Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften** aufmerksam, die in 7 Bänden die Arithmetik und Algebra, die Analysis, die Geometrie, die Mechanik, die Physik, die Geodäsie und Geophysik und die Astronomie behandelt und in einem Schlußband historische, philosophische und didaktische Fragen besprechen wird. Eine **französische Ausgabe**, von französischen Mathematikern besorgt, hat zu erscheinen begonnen.

Weitester Verbreitung erfreuen sich die mathematischen und naturwissenschaftlichen Zeitschriften meines Verlags, als da sind: Die **Mathematischen Annalen**, die **Bibliotheca Mathematica** (Zeitschrift für Geschichte der Mathematischen Wissenschaften), das **Archiv der Mathematik und Physik**, der **Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung**, die **Zeitschrift für Mathematik und Physik** (Organ für angewandte Mathematik), die **Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht**, die **Mathematisch-naturwissenschaftlichen Blätter**, ferner **Natur und Schule** (Zeitschrift für den gesamten naturkundlichen Unterricht aller Schulen), die **Geographische Zeitschrift** u. a.

Seit 1868 veröffentliche ich: **„Mitteilungen der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner“**. Diese jährlich zweimal erscheinenden „Mitteilungen“, die unentgeltlich in 30000 Exemplaren sowohl im In- als auch im Auslande von mir verbreitet werden, sollen das Publikum, das meinem Verlage Aufmerksamkeit schenkt, von den erschienenen, unter der Presse befindlichen und von den vorbereiteten Unternehmungen des Teubnerschen Verlags in Kenntnis setzen und sind ebenso wie das bis auf die Jüngstzeit fortgeführte **Ausführliche Verzeichnis des Verlags von B. G. Teubner auf dem Gebiete der Mathematik, der Technischen und Naturwissenschaften nebst Grenzgebieten**, 100. Ausgabe [XLVIII u. 272 S. gr. 8], in allen Buchhandlungen unentgeltlich zu haben, werden auf Wunsch aber auch unter Kreuzband von mir unmittelbar an die Besteller übersandt.

Leipzig, Poststraße 3. **B. G. Teubner.**




STANFORD UNIVERSITY
LIBRARY

[Fortsetzung am Ende des Buches.]

HANDBUCH

DER THEORIE DER

GAMMAFUNKTION

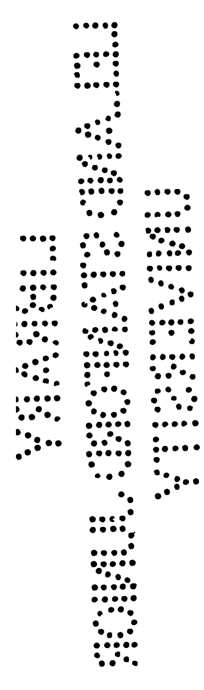
VON

DR. NIELS NIELSEN

DOZENT DER REINEN MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT KOPENHAGEN
INSPEKTOR DES MATHEMATISCHEN UNTERRICHTS AN DEN GYMNASIEN DÄNEMARKS



LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1906



HERRN

GENERALMAJOR V. H. O. MADSEN

VORSITZENDEM DER MATHEMATISCHEN VEREINIGUNG IN KOPENHAGEN

AUS INNIGSTER DANKBARKEIT GEWIDMET

VOM VERFASSER

Vorwort.

Die Gammafunktion hat für die Entwicklung der modernen Analysis eine wichtige Rolle gespielt; denn obgleich diese Funktion als eine der einfachsten Transzendenten überhaupt bezeichnet werden muß, so ist sie doch so viel komplizierter als die Elementartranszendente e^x, daß sie Eigenschaften besitzt, welche dieser Funktion nicht zukommen.

In der Tat haben die durch Gammafunktionen ausdrückbaren Integrale bei der Grundlegung einer strengen Theorie der bestimmten Integrale überhaupt eine Rolle gespielt, während die merkwürdige Stirlingsche Reihe zum Studium der asymptotischen Darstellungen anregte. Vor allem ist aber zu erwähnen, daß die Produktdarstellung von $\Gamma(x)$ die Weierstraßsche Zerlegung der ganzen transzendenten Funktionen in Primärfaktoren hervorgerufen hat.

Wir finden daher, daß die hervorragendsten Analysten aller Zeiten nach der Einführung von $\Gamma(x)$ diese interessante Funktion studiert haben.

Nach diesen Tatsachen ist es aber sehr merkwürdig, daß seit dem Erscheinen des Legendreschen Traité keine einzige Arbeit veröffentlicht worden ist, welche eine für ihre Zeit vollständige Darstellung der Gammafunktion versucht hat; denn die recht zahlreich vorhandenen Monographien betrachten nur diesen oder jenen Abschnitt der Theorie unserer Funktion. Demzufolge herrscht recht häufig eine große Unklarheit über die Prioritätsfragen, und mehr als ein bedeutender Mathematiker hat Sätze und Methoden, die altbekannt waren, wiedergefunden und als neu publiziert.

Das vorliegende Handbuch, welches das Resultat mehr als zwanzigjähriger Studien und Untersuchungen des Verfassers bildet, versucht eine der Jetztzeit entsprechende Gesamtdarstellung der Haupteigenschaften der Gammafunktion und verwandter Funktionen in möglichst elementarer Form zu geben. Um dies fertig zu bringen, habe ich die überaus reiche Literatur so sorgfältig, wie es mir überhaupt möglich war, durchmustert; dennoch darf ich natürlich nicht behaupten, daß die Quellenzitate in meinem Buche überall die

Prioritätsfragen endgültig beantworten. Ähnliches gilt über das Literaturverzeichnis; ich hoffe, daß darin alle wichtigeren Arbeiten aufgenommen sind, während es wohl möglich ist, daß kleinere Aufsätze mir entgingen.

Der erste Teil des Buches gibt in elementarer Form, als Anwendung der Theorie der analytischen Funktionen und ohne Zuhilfenahme bestimmter Integrale, die Fundamentaleigenschaften der Gammafunktion und verwandter Funktionen.

Im zweiten Teile werden die Eulerschen Integrale und die bestimmten Integrale elementarer Funktionen behandelt, die sich in einfacher Form durch Gammafunktionen ausdrücken lassen.

Bei der endgültigen Ausarbeitung dieser beiden Abschnitte, die wortgetreu meine erste Vorlesung als Dozenten der reinen Mathematik an der hiesigen Universität wiedergeben, sind insbesondere zwei Arbeiten von durchgreifender Bedeutung für mich gewesen, nämlich die schönen Abhandlungen von Pringsheim und Jensen.

Der dritte und letzte Teil des Buches behandelt die reziproke Gammafunktion als Entwicklungsfunktion, indem er die vom Verfasser entwickelte Theorie der Fakultätenreihen darstellt. In diesem Abschnitte findet man wohl die erste vollständige Würdigung der tiefgehenden Gedanken, denen schon im Jahre 1730 Stirling Ausdruck verlieh.

Was endlich die Verallgemeinerungen und Analogien betrifft, so habe ich dieselben nicht behandelt, weil sie in der Tat von keiner wirklichen Bedeutung für die Gammafunktion selbst gewesen sind oder sein werden; dagegen findet man die betreffenden Arbeiten im letzten Abschnitte des Literaturverzeichnisses angeführt.

Es ist mir eine teuere Pflicht, Herrn Generalmajor V.H.O. Madsen meinen herzlichsten Dank auszusprechen für das freundliche Interesse, das er auch der Ausarbeitung dieses Buches entgegengebracht hat, und für seine Anregungen und Aufmunterungen während der vorhergehenden schwierigen Untersuchungen und weitläufigen Studien.

Endlich muß ich vor allem noch der Verlagsbuchhandlung für ihr freundliches Entgegenkommen und für die schöne Ausstattung des Buches meinen besten Dank aussprechen.

Kopenhagen, den 7. Oktober 1905.

Dr. Niels Nielsen.

Inhalt.

Erster Teil.

Analytische Theorie der Gammafunktion.

Kapitel I. Fundamentaleigenschaften der Funktionen $\Gamma(x)$ und $\Psi(x)$.

Kapitel II. Die Funktionen $P_a(x)$ und $Q_a(x)$.

Kapitel III. Entwicklungen in Potenzreihen.

Kapitel IV. Auswertung unendlicher Reihen und Produkte.

Kapitel V. Fakultäten und Fakultätenkoeffizienten.

Zweiter Teil.

Bestimmte Integrale.

Seite

Dritter Teil.

Theorie der Fakultätenreihen.

Kapitel XVII. Fundamentaleigenschaften der Fakultätenreihen.

Kapitel XVIII. Algorithmus der Fundamentaloperationen.

Kapitel XIX. Multiplikation des Argumentes in $\Omega(x)$.

Kapitel XX. Methoden von Stirling.

Kapitel XXI. Anwendungen auf die Gammafunktion.

ERSTER TEIL

ANALYTISCHE THEORIE DER GAMMAFUNKTION

Kapitel I.

Fundamentaleigenschaften der Funktionen $\Gamma(x)$ und $\Psi(x)$.

§ 1. Die Differenzengleichung der Gammafunktion.

Nach Weierstraß[1]) definieren wir die Gammafunktion $\Gamma(x)$ als diejenige Lösung der Differenzengleichung

$$F(x+1) = xF(x), \tag{1}$$

welche zugleich die Bedingung

$$\lim_{n=+\infty} \frac{F(x+n)}{(n-1)!\,n^x} = 1 \tag{2}$$

befriedigt, wo x eine willkürliche endliche Größe bedeutet, während n als positive ganze Zahl anzusehen ist.

Um nun die Differenzengleichung (1) vollständig aufzulösen, ist es nur notwendig, eine einzige partikuläre Lösung dieser Gleichung zu kennen. Es seien nämlich $F_1(x)$ und $F_2(x)$ zwei willkürliche Lösungen von (1), dann muß ihr Quotient eine in x periodische Funktion mit der additiven Periode $+1$ sein; denn man hat vermöge (1):

$$\frac{F_2(x+1)}{F_1(x+1)} = \frac{xF_2(x)}{xF_1(x)} = \frac{F_2(x)}{F_1(x)}.$$

Bezeichnet umgekehrt $\omega(x)$ eine in x periodische Funktion mit der additiven Periode $+1$, ist also

$$\omega(x+1) = \omega(x), \tag{3}$$

und bedeutet $F_1(x)$ irgend eine Lösung von (1), so ist offenbar auch die Funktion

$$F_2(x) = \omega(x) \cdot F_1(x) \tag{4}$$

eine Lösung derselben Gleichung.

---

1) Journal für Mathematik Bd. 51, p. 36; 1856. Abhandlungen aus der Funktionenlehre p. 229; 1886. Werke Bd. I. p. 194.

Weierstraß definiert die Funktion $F_c(x) = 1 : \Gamma(x)$; seine Bedingung $F_c(1) = 1$ ist nicht notwendig.

Nun ist eine direkte Auflösung von (1) nicht ganz einfach; es scheint uns daher angemessen, zunächst eine einfachere Gleichung aufzulösen. Zu diesem Zwecke bezeichnen wir mit $\mathfrak{F}(x)$ eine in x differentiierbare Lösung von (1), deren Existenz wir augenblicklich beweisen wollen, und führen wir die neue Funktion

$$\mathfrak{G}(x) = D_x \log \mathfrak{F}(x) \tag{5}$$

ein, für welche wir vermöge (1) die einfachere Differenzengleichung

$$\mathfrak{G}(x+1) = \frac{1}{x} + \mathfrak{G}(x) \tag{6}$$

finden, die sehr leicht aufgelöst werden kann.

Die Funktion $-\frac{1}{x+s}$ ist zwar nicht *„summierbar“*, wohl aber ist es die andere Funktion $\left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{x+s}\right)$, und somit ergibt sich, daß die Funktion

$$\mathfrak{G}(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{x+s}\right) \tag{7}$$

sicher eine Lösung von (6) ist; die *allgemeinste* Lösung dieser Differenzengleichung läßt sich demnach folgendermaßen darstellen:

$$G(x) = \mathfrak{G}(x) + \omega(x), \tag{8}$$

wo $\omega(x)$ der Periodizitätsbedingung (3) Genüge leistet, sonst aber ganz willkürlich angenommen werden darf.

Die durch (7) definierte Funktion $\mathfrak{G}(x)$ hat offenbar in den Punkten $0, -1, -2, -3, \cdots$ einfache Pole mit dem Residuum -1, ist sonst aber für jeden endlichen Wert von x eine analytische Funktion dieses Argumentes. Aus (7) findet man weiter:

$$\mathfrak{G}(1) = 0 \tag{9}$$

und, wenn p eine positive ganze Zahl bedeutet:

$$\mathfrak{G}(p+1) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p}. \tag{10}$$

Nach dem vorhergehenden läßt sich die Funktion $\mathfrak{G}(1+x)$ also in eine Potenzreihe entwickeln, die im Innern des Kreises $|x| = 1$ konvergiert; setzt man der Kürze halber:

$$s_n = \frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \cdots, \tag{11}$$

wo n eine ganze Zahl und größer als 1 ist, so findet man ohne Mühe aus (7) folgende Entwicklung:

$$(12) \qquad \mathfrak{S}(1+x) = \sum_{r=2}^{r=\infty} (-1)^r s_r \cdot x^{r-1}, \qquad |x| < 1;$$

unter derselben Voraussetzung über $|x|$ fließt dann aus (12) die neue Entwicklung:

$$(13) \qquad \int_0^x \mathfrak{S}(1+x)dx = \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{(-1)^r s_{r+2}}{r+2} \cdot x^{r+2}.$$

Die Potenzreihe rechter Hand in (13) ist für $x = 1$ konvergent; man hat nämlich offenbar:

$$\frac{1}{(2^p+1)^n} + \frac{1}{(2^p+2)^n} + \cdots + \frac{1}{(2^{p+1})^n} < \frac{2^p}{2^{pn}} = \frac{1}{2^{p(n-1)}}$$

und somit auch wegen (11):

$$(14) \qquad s_n < 1 + \frac{1}{2^{n-1}-1} < 1 + \frac{1}{2^{n-2}};$$

setzt man daher der Kürze halber:

$$\pm R_{n,p} = \sum_{r=1}^{r=p} \frac{(-1)^{r-1}}{n+r} \cdot s_{n+r},$$

so folgt aus (14) die Ungleichung:

$$|R_{n,p}| < \sum_{r=1}^{r=p} \frac{(-1)^{r-1}}{n+r} + \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{r=1}^{r=p} \frac{1}{2^{n+r-2}},$$

und es ist demnach möglich, eine große positive ganze Zahl N so zu bestimmen, daß für alle positiven ganzen Werte von p immer

$$|R_{n,p}| < \varepsilon$$

ist, wo ε eine vorgegebene positive Größe von beliebiger Kleinheit bedeutet, wenn nur $n \geqq N$ vorausgesetzt wird; das heißt, die Potenzreihe rechter Hand in (13) konvergiert für $x = 1$.

Nach diesen Erörterungen ergibt ein bekannter Satz von Abel[1]) die numerische Gleichheit:

$$(15) \qquad \int_0^1 \mathfrak{S}(1+x)dx = \int_1^2 \mathfrak{S}(x)dx = \sum_{r=2}^{r=\infty} \frac{(-1)^r s_r}{r},$$

ein Resultat, das uns bald sehr nützlich sein wird.

1) Man vergleiche zum Beispiel Rausenberger, Lehrbuch der Theorie der periodischen Funktionen p. 84; Leipzig, Teubner 1884. Julius Petersen, Vorlesungen über Funktionentheorie, p. 138—139; Kopenhagen 1898. Der Beweis ist von Lejeune-Dirichlet, aber erst 1862 nach seinem Tode von Liouville im Journal de Math. (2) Bd. 7, p. 253—255 veröffentlicht worden.

§ 2. Die Eulersche Konstante.

Die in § 1, (7) eingeführte Funktion $\mathfrak{G}(x)$ besitzt eine merkwürdige Eigenschaft, die sich uns noch eigentümlicher darstellt, wenn wir die rationale Funktion

$$\mathfrak{G}_n(x) = \sum_{s=0}^{s=n-1} \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{x+s} \right) \tag{1}$$

in Betracht ziehen, in der n eine positive ganze und endliche Zahl bedeutet, und aus der unmittelbar der Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} \mathfrak{G}_n(x) = \mathfrak{G}(x) \tag{2}$$

folgt. Beachtet man weiter die Identität:

$$\frac{1}{x+ps+r} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{\frac{x+r}{p}+s},$$

und setzt man darin der Reihe nach

$$s = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1,$$

dann aber in jeder der so erhaltenen Gleichungen nacheinander

$$r = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ p-1,$$

so liefert die Addition aller so erhaltenen Formeln eine Identität von folgender Form:

$$\mathfrak{G}_{np}(x) = \frac{1}{p} \cdot \sum_{r=0}^{r=p-1} \mathfrak{G}_n\left(\frac{x+r}{p}\right) + A, \tag{3}$$

wo A eine von x unabhängige Konstante bedeutet; denn mit den obigen Werten von s und r muß offenbar die Zahl $(ps+r)$ die ganze Zahlenreihe

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ np-1$$

einmal, aber auch nur einmal durchlaufen.

Um nun den Wert der Konstante A zu bestimmen, setzen wir in (3) $x = \infty$ und erhalten dann, vermöge der aus (1) fließenden Identität

$$\mathfrak{G}_n(\infty) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}, \tag{4}$$

folgende Bestimmung von A:

$$A = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{np}; \tag{5}$$

damit haben wir folgende merkwürdige Identität:

$$\mathfrak{S}_{np}(x) = \frac{1}{p} \cdot \sum_{r=0}^{r=p-1} \mathfrak{S}_p\left(\frac{x+r}{p}\right) + \sum_{s=n+1}^{s=np} \frac{1}{s} \tag{6}$$

bewiesen. Läßt man nunmehr in (5) die positive ganze Zahl n über jede Grenze hinauswachsen, während p endlich und bestimmt bleibt, so liefert die Definition des bestimmten Integrales den Grenzwert:

$$\lim_{n=\infty} A = \lim_{n=\infty} \sum_{s=1}^{s=np-p} \frac{1}{1+\frac{s}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \int_1^p \frac{dx}{x} = \log p,$$

und somit erhalten wir aus (6), vermöge (2), die neue Formel:

$$\mathfrak{S}(x) = \frac{1}{p} \cdot \sum_{r=0}^{r=p-1} \mathfrak{S}\left(\frac{x+r}{p}\right) + \log p. \tag{7}$$

Aus (7) kann man nun ohne Mühe einen weiteren Grenzwert herleiten, der uns noch späterhin unentbehrlich sein wird; setzt man nämlich in (7) $x = p + 1$, so findet man wegen § 1, (10) für die Differenz:

$$C_p = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p} - \log p \tag{8}$$

den Ausdruck:

$$C_p = \frac{1}{p} \cdot \sum_{r=1}^{r=p} \mathfrak{S}\left(1 + \frac{r}{p}\right), \tag{9}$$

aus dem deutlich hervorgeht, daß C_p immer positiv sein muß; denn die Definition § 1, (7) zeigt unmittelbar, daß $\mathfrak{S}(x)$ positiv ist, wenn x größer als 1 vorausgesetzt wird.

Läßt man jetzt in (9) die positive ganze Zahl p über jede Grenze hinauswachsen, so ergibt sich gemäß der Definition des bestimmten Integrales hinwiederum folgender Grenzwert:

$$\lim_{p=\infty} C_p = \int_1^2 \mathfrak{S}(x)\,dx; \tag{10}$$

bezeichnet man also der Kürze halber durch C den Grenzwert linker Hand in (10), das heißt, setzt man

$$C = \lim_{p=\infty} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p} - \log p\right), \tag{11}$$

so folgt aus (10) und § 1, (15) die Formel von Euler[1]):

1) Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, Bd. 14, p. 157; (1769) 1770. Nova Acta Academiae Petropolitanae, Bd. 2, p. 9; (1784) 1788.

$$C = \sum_{r=2}^{r=\infty} \frac{(-1)^r}{r} \cdot s_r, \tag{12}$$

aus der unter Anwendung der bekannten Reihe

$$\log 2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

die etwas rascher konvergierende Entwicklung:

$$C + \log 2 = 1 - \sum_{r=2}^{r=\infty} \frac{(-1)^r}{r} (1 - s_r) \tag{13}$$

folgt, die ebenfalls von Euler[1]) herrührt. Wir werden später in §§ 14, 33 für C Reihenentwicklungen herleiten, welche noch viel rascher als (13) konvergieren.

Die so definierte positive Zahl C wird gewöhnlich die Eulersche Konstante genannt, weil Euler[2]) sie zum ersten Male in die Analysis eingeführt hat.

Die Natur der Konstante C ist uns noch ganz verborgen; wir wissen nicht, ob diese Konstante eine algebraische oder eine transzendente Zahl ist, und es ist bisher nicht gelungen, C durch bekannte transzendente Zahlen wie zum Beispiel π, e oder Logarithmen unter endlicher Form auszudrücken. Dagegen kennt man sehr gut den numerischen Wert von C; die näherungsweise Berechnung dieser Zahl läßt sich mittels der Definition (11) und unter Anwendung der Eulerschen (Maclaurinschen) Summenformel durchführen.[3])

Euler[4]) gibt C auf 16 Dezimalstellen an, von welchen jedoch die letzte unrichtig ist; Mascheroni[5]) rechnet bis zu 32 Dezimalstellen, von welchen indessen die letzten 13 unrichtig sind.

---

1) Novi Commentarii Academiae Petropolitanae Bd. 14, p. 158, 159; (1769) 1770.

2) Commentarii Academiae Petropolitanae, Bd. 7, p. 157; (1734—35) 1740. Institutiones calculi differentialis, p. 144; 1755.

3) Man vergleiche z. B. Petersen, Vorlesungen über Funktionentheorie, p. 164; Kopenhagen 1898. Über die älteste Literatur G. Eneström, Öfversigter der Stockholmer Akademie Bd. 36, Nr. 10, p. 3—17; 1879.

4) Acta Acad. Petrop. 1781, II, p. 46. Nova Acta Acad. Petrop. Bd. 4, p. 3; (1786) 1789.

5) Adnotationes ad. calc. int. Euleri, 1790. Der unrichtige Wert von C, welchen Mascheroni angibt, kommt bei mehreren Autoren vor, so z. B. bei Bessel im Königsberger Archiv; 1812, p. 4, Lacroix im Traité du calcul différentiel et intégral Bd. III, p. 521. Soldner gibt in Théorie et tables d'une nouvelle fonction transcendante p. 13 einen neuen und richtigen Wert von C an.

Gauß[1]) hat C bis auf 23 Dezimalstellen berechnet; da dieser Wert von demjenigen von Mascheroni abweicht, hat Gauß Nicolai veranlaßt, jene Berechnung zu wiederholen und weiter fortzuführen; Nicolai[2]) gab dann C bis auf 40 Dezimalstellen an.

Oettinger[3]) nahm die näherungsweise Bestimmung von C wieder auf und fand 43 Dezimalstellen. Der nächste Berechner war Shanks[4]); er gab 70 Dezimalstellen an, von welchen jedoch die letzten 21 unrichtig waren.

Glaisher[5]) machte auf den Fehler von Shanks aufmerksam und berechnete für C die ersten 100 Dezimalstellen. Shanks[6]) hat dann seine Rechnung wieder aufgenommen und C bis auf 110 Dezimalstellen angegeben, von welchen, wie von Adams[7]) nachgewiesen ist, die letzten 7 unrichtig sind. Adams[8]) hat endlich C bis auf 263 Dezimalstellen angegeben, von denen die ersten 50 lauten:

$$C = 0 \cdot 57721 \quad 56649 \quad 01532 \quad 86060 \quad 65120 \quad 90082 \quad 40243$$
$$10421 \quad 59335 \quad 93992.$$

§ 3. Allgemeine Auflösung der Differenzengleichung § 1, (1).

Nachdem wir die Funktion $\mathfrak{G}(x)$ und die Eulersche Konstante C eingeführt haben, gehen wir nunmehr zur vollständigen Auflösung der Differenzengleichung § 1, (1) über. Zu diesem Zwecke bemerken wir, daß die Reihe rechter Hand in § 1, (7), das heißt, die Reihe:

$$\mathfrak{G}(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{x+s} \right)$$

für jeden endlichen Wert von x, der nicht gleich Null oder einer negativen ganzen Zahl ist, unbedingt und gleichmäßig konvergent ist; diese Reihe darf daher nach x gliedweise integriert werden, falls der Integrationsweg endlich ist und durch keinen der oben genannten Pole geht.

1) 2) Comment. Gott. Bd. 2, p. 36; 1812. Werke Bd. III, p. 154. Deutsche Ausgabe p. 43.

3) Journal für Mathematik Bd. 60, p. 375—377; 1862.

4) Proc. of the Royal Soc. London, Bd. 15, pp. 429—431, 431—432 (1867); Bd. 16, pp. 154, 299—300 (1868); Bd. 18, p. 49; 1869.

5) Proceedings of the Royal Society of London, Bd. 19, p. 514—524; 1871.

6) Ebenda Bd. 20, p. 27—34; 1872.

7) 8) Ebenda Bd. 27, p. 88—94; 1878.

Es sei nun $\omega(x)$ eine in x periodische Funktion, die von 0 bis x integrierbar ist, mit der additiven Periode $+1$; für die Funktion:

$$\omega_1(x) = \int_0^x \omega(x)\,dx$$

findet man dann die Funktionalgleichung:

$$\omega_1(x+1) = \omega_1(x) + K,$$

wo K eine von x unabhängige Konstante bedeutet, oder mit anderen Worten: $\omega_1(x) - K \cdot x$ ist wiederum eine in x periodische Funktion mit der additiven Periode $+1$.

Setzt man daher:

$$\log F(x+1) = \int_0^x \mathfrak{G}(1+x)\,dx + K\cdot(x+1),$$

oder, was offenbar dasselbe ist:

$$\text{(1)} \qquad \log F(x+1) = \sum_{s=0}^{s=\infty}\left(\frac{x}{s+1} - \log\left(1 + \frac{x}{s+1}\right)\right) + K\cdot(x+1),$$

so muß es möglich sein, über die Konstante K derart zu verfügen, daß $F(x)$ eine Lösung der Differenzengleichung § 1, (1) wird; somit läßt sich vermöge § 1, (4) die allgemeinste Lösung dieser Gleichung durch folgende Formel darstellen:

$$\text{(2)} \qquad F(x) = \frac{F(x+1)}{x} = \omega(x)\cdot\frac{e^{Kx}}{x}\cdot\prod_{s=1}^{s=\infty}\frac{e^{\frac{x}{s}}}{1+\frac{x}{s}},$$

wo $\omega(x)$ eine in x periodische Funktion mit der additiven Periode $+1$ bedeutet, während wir den Wert von K erst noch zu bestimmen haben.

Zu diesem Zwecke setzen wir der Kürze halber:

$$\mathfrak{F}_n(x) = \frac{e^{Kx}}{x}\cdot\prod_{s=1}^{s=n-1}\frac{e^{\frac{x}{s}}}{1+\frac{x}{s}},$$

woraus:

$$\mathfrak{F}_n(x+1) = \frac{e^{Kx}\cdot e^{K}}{x+1}\cdot\prod_{s=1}^{s=n-1}\frac{e^{\frac{x}{s}}\cdot e^{\frac{1}{s}}}{1+\frac{x}{s+1}}\cdot\frac{s}{s+1},$$

oder, was dasselbe ist:

$$\text{(3)} \qquad \mathfrak{F}_n(x+1) = \frac{e^{Kx}\cdot e^{K}}{x+1}\cdot\prod_{s=1}^{s=n-1}\frac{e^{\frac{x}{s}}}{1+\frac{x}{s+1}}\cdot e^{\frac{1}{s}-\log\left(1+\frac{1}{s}\right)}$$

folgt; nun ist aber, wie wir eben gesehen haben, die Summe:

$$\sum_{s=1}^{s=n-1}\left(\frac{1}{s}-\log\left(1+\frac{1}{s}\right)\right)$$

immer, auch wenn n über jede Grenze hinauswächst, eine endliche Zahl, und man findet somit aus (3):

$$\mathfrak{F}_n(x+1)=\frac{x}{1+\frac{x}{n}}\cdot e^{K+C_n-\frac{1}{n}}\cdot\mathfrak{F}_n(x),$$

wo C_n die in § 2, (8) definierte positive Zahl

$$C_n=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)$$

bedeutet. Setzt man daher $K=-C_n+\frac{1}{n}$, so findet man, daß die Funktion:

$$\mathfrak{F}_n(x)=\frac{e^{-C_n x+\frac{x}{n}}}{x}\cdot\prod_{s=1}^{s=n-1}\frac{e^{\frac{x}{s}}}{1+\frac{x}{s}} \tag{4}$$

der Funktionalgleichung:

$$\mathfrak{F}_n(x+1)=x\cdot\mathfrak{F}_n(x)\cdot\frac{n}{n+x} \tag{5}$$

genügt. Damit ist wegen (2) der Satz bewiesen:

Es sei C die Eulersche Konstante, während $\omega(x)$ der Periodizitätsbedingung $\omega(x+1)=\omega(x)$ Genüge leistet, sonst aber ganz willkürlich angenommen werden darf; dann läßt sich die allgemeinste Lösung der Differenzengleichung § 1, (1) *folgendermaßen darstellen:*

$$F(x)=\omega(x)\cdot\frac{e^{-Cx}}{x}\cdot\prod_{s=1}^{s=\infty}\frac{e^{\frac{x}{s}}}{1+\frac{x}{s}}. \tag{6}$$

Führt man in (4) den Ausdruck für C_n ein, so findet man eine weitere Darstellung von $\mathfrak{F}_n(x)$:

$$\mathfrak{F}_n(x)=\frac{1\cdot2\cdot3\cdots(n-1)\cdot n^x}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)}, \tag{7}$$

wo

$$n^x=e^{x\log n}$$

zu setzen und der positive Wert von $\log n$ zu benutzen ist; aus (6) und (4) findet man endlich den Grenzwert:

$$F(x)=\omega(x)\cdot\lim_{n=\infty}\mathfrak{F}_n(x). \tag{8}$$

§ 4. Die Gamma- und Betafunktionen.

Es ist nun sehr leicht, über die in § 3, (6) auftretende willkürliche Funktion $\omega(x)$ so zu verfügen, daß $F(x)$ mit der Gammafunktion zusammenfällt, daß also auch die Bedingung § 1, (2) befriedigt wird.

Bedeutet nämlich n eine positive ganze Zahl, die vorläufig als endlich vorausgesetzt werden mag, so hat man wegen § 1, (1) unter Anwendung der Formel § 3, (7) die Identität:

$$\frac{F(x+n)}{(n-1)!\,n^x} = \frac{F(x)\cdot x(x+1)\cdots(x+n-1)}{(n-1)!\,n^x} = \frac{F(x)}{\mathfrak{F}_n(x)},$$

aus der nach § 3, (8):

$$\lim_{n=\infty} \frac{F(x+n)}{(n-1)!\,n^x} = \omega(x)$$

folgt, so daß § 1, (2) unmittelbar $\omega(x) = 1$ ergibt. Somit finden wir für die Gammafunktion die Produktdarstellung:

$$\Gamma(x) = \frac{e^{-Cx}}{x}\cdot\prod_{s=1}^{s=\infty}\frac{e^{\frac{x}{s}}}{1+\frac{x}{s}} \tag{1}$$

oder auch unter Anwendung von § 3, (7), (8) den Grenzwert:

$$\Gamma(x) = \lim_{n=\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n^x}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)}. \tag{2}$$

Von diesen beiden Darstellungen für $\Gamma(x)$ ist die erste von Schlömilch[1]) und kurz nachher von Newman[2]) gefunden worden; aber erst Weierstraß hat die funktionentheoretische Bedeutung dieser Produktdarstellung in das rechte Licht gestellt, indem er sie zum Ausgangspunkt für seine Zerlegung ganzer transzendenter Funktionen in Primärfaktoren genommen hat.

Die Formel (2) ist in etwas anderer Form schon von Euler[3]) gegeben, später aber von Gauß[4]) wiedergefunden worden.

Die Funktion $\Gamma(x)$ ist von Euler in die Analysis eingeführt worden; leider hat er aber die Produktdarstellung zu schnell liegen lassen, um die entsprechende Integraldarstellung zu untersuchen; aus dieser Integraldarstellung für $\Gamma(x)$ stammt offenbar der noch heute

---

1) Grunert Archiv, Bd. 4, p. 171; 1844. Analytische Studien, I, p 45; 1848.

2) Cambridge and Dublin math. Journal, Bd. 3, p. 57—60; 1848.

3) 1729. Correspondance math. et phys. Bd. I, p. 2.

4) Comment. Gotting. Bd. 2, p. 25—26; 1812. Werke, Bd. III, p. 145; Deutsche Ausgabe, p. 37—38.

recht häufig gebrauchte Name *zweites Eulersches Integral*. Die Bezeichnung $\Gamma(x)$ und der daraus fließende Name *Gammafunktion* rührt dagegen von Legendre[1]) her. Gauß braucht die Bezeichnung $\Pi(x)$, und es ist bei ihm:

$$\Pi(x) = \Gamma(x+1).$$

Wie zuerst Euler[2]) und später Gauß[3]) und Schlömilch[4]) bemerkt haben, läßt sich die Formel (2) auch folgendermaßen darstellen:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \cdot \prod_{s=1}^{s=\infty} \frac{(s+1)^x}{s^{x-1}(x+s)}; \tag{3}$$

Aus (2) findet man unmittelbar:

$$\Gamma(1) = 1, \tag{4}$$

woraus, wenn p eine positive ganze Zahl bedeutet:

$$\Gamma(p+1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots p = p! \tag{5}$$

folgt. Unter derselben Voraussetzung für p findet man aus § 3, (7) den Grenzwert:

$$\lim_{x=-p} (x+p)\mathfrak{F}_n(x) = \frac{(-1)^p}{p!} \cdot \frac{(n-p)(n-p+1)\cdots(n-1)}{n^p}, \qquad p < n$$

und daraus den Satz:

Die Gammafunktion hat in 0 und den negativen ganzen Zahlen einfache Pole, und das Residuum der Pole $-p$ ist gleich $(-1)^p : p!$. Sonst ist $\Gamma(x)$ in der ganzen x-Ebene eine in x analytische Funktion, welche niemals den Wert Null annehmen kann.

Aus (1) folgt noch der Satz:

Die Funktion $1 : \Gamma(x)$ ist eine ganze transzendente Funktion vom Genre 1 und mit einfachen Nullstellen in Null und den negativen ganzen Zahlen.

Aus den Definitionen (1) und (2) für $\Gamma(x)$ ist es sehr leicht, eine interessante Beziehung zwischen den Funktionen $\Gamma(x)$ und $\sin \pi x$ herzuleiten; man findet nämlich aus § 3, (7) die Produktformel:

---

1) Mémoires de l'Institut de France, Bd. 10, p. 476; 1809.

2) Correspondance math. et phys. Bd. I, p. 1; 1729. Institutiones calculi integralis Bd. IV, p. 105; 1794. Institutiones calculi differentialis, p. 834; 1755.

3) Commentationes Gottingenses Bd. 2, p. 26. Werke, Bd. III, p. 146. Deutsche Ausgabe, p. 32.

4) Analytische Studien, I, p. 47; 1848.

$$\mathfrak{F}_n(x)\mathfrak{F}_n(1-x) = \frac{1}{x}\cdot\frac{n}{n-x}\cdot\prod_{s=1}^{s=n-1}\frac{1}{1-\left(\frac{x}{s}\right)^2};$$

daraus folgt gemäß (2) die gesuchte Formel:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x}, \tag{6}$$

welche man Euler[1]) verdankt.

Beachtet man, daß $\Gamma(x)$ für positive Werte von x selbst positiv sein muß, so findet man aus (6) das numerische Resultat:

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}, \tag{7}$$

das gemäß (2) als eine unmittelbare Folge des Produktes von Wallis angesehen werden kann; die Formel (7) rührt gleichfalls von Euler[2]) her.

Aus den Definitionen für $\mathfrak{F}_n(x)$, nämlich:

$$\mathfrak{F}_n(x) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n^x}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)} = \frac{e^{-C_n x+\frac{x}{n}}}{x}\cdot\prod_{s=1}^{s=n-1}\frac{e^{\frac{x}{s}}}{1+\frac{x}{s}},$$

leitet man endlich unmittelbar, vermöge der Definition eines konvergenten unendlichen Produktes, den folgenden Satz her:

Es bedeute x eine endliche Größe, welche weder 0 noch eine negative ganze Zahl sein darf; dann ist es möglich, eine positive ganze Zahl N so zu bestimmen, daß:

$$|\Gamma(x)-\mathfrak{F}_n(x)| < \varepsilon \tag{8}$$

wird, wo ε eine vorgegebene positive Größe von beliebiger Kleinheit bedeutet, während $n \geqq N$ angenommen wird.

In früheren Zeiten spielte das sogenannte *erste Eulersche Integral* $B(x, y)$, welches von Binet[3]) die *Betafunktion* genannt wurde, das heißt, die Funktion:

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{9}$$

eine hervorragende Rolle; für die Betafunktion findet man aus (9) ohne Mühe die Fundamentalformeln:

$$B(x,y) = B(y,x), \quad B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}\cdot B(x,y) \tag{10}$$

---

1) Institutiones calculi integralis, Bd. IV, p. 105; 1794. Novi Comment. Acad. Petrop. Bd. 16, p. 136; (1771) 1772.

2) Novi Commentarii Acad. Petrop. Bd. 16, p. 111; (1771) 1772. Inst. calc. integr. Bd. IV, p. 87; 1794.

3) Journal de l'École Polytechnique, cahier 27; 1839.

und mittels (6) die spezielle Formel:

$$B(x, 1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \cdot \tag{11}$$

Obgleich schon Euler[1]) die Formel (9) angegeben hat, betrachtete man doch die Betafunktion noch lange als independente Funktion und leitete mittels (10) zwischen Betafunktionen eine große Menge von Beziehungen her, die sich häufig nach einer Anwendung von (9) in reine Trivialitäten auflösen; man vergleiche z. B. die klassischen Arbeiten von Legendre und Binet oder sogar von Euler selbst.

§ 5. Die Funktionen $\Psi(x)$ und $\beta(x)$.

Für die Funktion:

$$\Psi(x) = D_x \log \Gamma(x) \tag{1}$$

findet man aus § 4, (1) unmittelbar die Entwicklung:

$$\Psi(x) = -C + \sum_{s=0}^{s=\infty} \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{x+s} \right), \tag{2}$$

während die Definition der Gammafunktion für $\Psi(x)$ die Funktionalgleichung:

$$\Psi(x+1) = \frac{1}{x} + \Psi(x) \tag{3}$$

liefert. Speziell findet man aus (2) die numerischen Resultate:

$$\Psi(\tfrac{1}{2}) = -C - 2 \log 2, \tag{4}$$

$$\Psi(1) = -C \tag{5}$$

und, wenn p eine positive ganze Zahl bedeutet:

$$\Psi(p+1) = -C + \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p} \right) \cdot \tag{6}$$

Wendet man noch die Eulersche Formel § 4, (6) an, so wird:

$$\Psi(1-x) - \Psi(x) = \pi \cot \pi x, \tag{7}$$

während die Produktdarstellung § 4, (2) den Grenzwert:

$$\Psi(x) = \lim_{n=\infty} \left(\log n - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \cdots - \frac{1}{x+n-1} \right) \tag{8}$$

liefert. Was die independente Definition von $\Psi(x)$ betrifft, so beweist man ohne Mühe den Satz:

---

1) Novi Comm. Acad. Petrop. Bd. 16, p. 186; (1771) 1772. Inst. calc. integralis Bd. IV, p. 93; 1794.

Die Funktion $\Psi(x)$ *ist durch die Differenzengleichung* (3) *mit der Nebenbedingung*:

$$\lim_{n=\infty}\left(\Psi(x+n)-\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{n-1}\right)=-C \tag{9}$$

vollkommen definiert; in (9) *bedeutet* n *eine positive ganze Zahl, während* x *eine willkürliche endliche Größe ist.*

Wir bemerken endlich, daß sich die Definition (1) auch folgendermaßen schreiben läßt:

$$D_x\Gamma(x)=\Gamma(x)\cdot\Psi(x), \tag{10}$$

woraus sich die analoge Formel:

$$D_x\left(\frac{1}{\Gamma(x)}\right)=-\frac{\Psi(x)}{\Gamma(x)} \tag{11}$$

ergibt. Wir führen schließlich noch die $\Psi(x)$ ähnliche Funktion:

$$\beta(x)=\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s}{x+s} \tag{12}$$

ein, aus der wegen (2):

$$\beta(x)=\frac{1}{2}\left(\Psi\left(\frac{x+1}{2}\right)-\Psi\left(\frac{x}{2}\right)\right) \tag{13}$$

folgt; aus (7) ergibt sich ferner die ähnliche Formel:

$$\beta(x)+\beta(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}, \tag{14}$$

während (12) unmittelbar die numerischen Resultate liefert:

$$\beta(1)=\log 2,\quad \beta\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}. \tag{15}$$

Was die independente Definition von $\beta(x)$ betrifft, so beweist man leicht den folgenden Satz:

Die Funktion $\beta(x)$ *ist durch die beiden Formeln:*

$$\beta(x+1)=\frac{1}{x}-\beta(x),\quad \lim_{\Re(x)=+\infty}\beta(x)=0 \tag{16}$$

vollkommen definiert.

Wir bemerken endlich, daß eine Kombination von (13) und § 4, (9) die Formel gibt:

$$\beta(x)=-D_x\log B\left(\frac{x}{2},\frac{1}{2}\right), \tag{17}$$

oder, was offenbar dasselbe ist:

$$D_xB\left(\frac{x}{2},\frac{1}{2}\right)=-B\left(\frac{x}{2},\frac{1}{2}\right)\cdot\beta(x). \tag{18}$$

Die Funktion $\beta(x)$ ist schon von Stirling[1]) betrachtet worden, während $\Psi(x)$ zuerst, und beinahe zu gleicher Zeit, von Legendre[2]), Poisson[3]) und vor allem von Gauß[4]) untersucht worden ist. $\Psi(x)$ tritt hier und da in der mathematischen Physik[5]) auf, ebenso seine erste Ableitung[6]).

§ 6. Das Multiplikationstheorem von Gauß.

Berücksichtigt man, daß sich die Funktion $\Psi(x)$ von der in § 1, (7) eingeführten Funktion $\mathfrak{G}(x)$ nur um eine Konstante unterscheidet, so findet man vermöge § 2, (7), daß:

$$\Psi(x) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{s=0}^{s=n-1} \Psi\left(\frac{x+s}{n}\right) + \log n \tag{1}$$

sein muß; somit liefert § 5, (1) für die Gammafunktion die Multiplikationsformel:

$$\Gamma(x) = K \cdot n^x \cdot \prod_{s=0}^{s=n-1} \Gamma\left(\frac{x+s}{n}\right), \tag{2}$$

wo K eine von x unabhängige Konstante bedeutet.

Um den Wert von K zu bestimmen, setzt man in (2) $x = 1$, woraus:

$$1 = nK \cdot \prod_{s=1}^{s=n-1} \Gamma\left(\frac{s}{n}\right)$$

oder, was dasselbe ist:

$$1 = nK \cdot \prod_{s=1}^{s=n-1} \Gamma\left(1 - \frac{s}{n}\right)$$

folgt; die Multiplikation der beiden letzten Gleichungen ergibt sonach wegen § 4, (6):

$$\pi^{n-1} \cdot n^2 K^2 = \prod_{s=1}^{s=n-1} \sin\frac{s\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

---

1) Methodus differentialis, p. 27; 1730.

2) Mémoires de l'Inst. de France 1809, p. 502.

3) Ebenda 1811, pp. 57, 257.

4) Comment. Gotting. Bd. 2, p. 34 ff. Werke: Bd. III, p. 153 ff. Deutsche Ausgabe p. 42 ff.

5) Kirchhoff in Journal für Math. Bd. 59, p. 110; 1861. Jude in Philosophical Magazine (5) Bd. 46, p. 254—258; 1898.

6) Hicks in Report of Brit. Assoc. for the Advancement of Science; 1878. P. Blaserna in Accad. dei Lincei Rendiconti (5) Bd. 4, p. 271—283; 1895.

Da K offenbar positiv sein muß, so wird:

$$K = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}};$$

damit ist die elegante Formel:

$$(3) \qquad \Gamma(x) = \frac{n^{x-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \cdot \prod_{s=0}^{s=n-1} \Gamma\left(\frac{x+s}{n}\right)$$

bewiesen, die man Gauß[1]) verdankt; es ist wie gewöhnlich:

$$n^x = e^{x \log n}$$

zu setzen, wo man für $\log n$ den reellen Wert zu nehmen hat. Für $x = 1$ war die Formel (3) übrigens schon Euler[2]) bekannt.

Das Multiplikationstheorem (3) ist später von mehreren Autoren, z. B. von Legendre[3]), Crelle[4]), Cauchy[5]), Lejeune-Dirichlet[6]) und Sonin[7]) bewiesen worden.

Offenbar ist die Gaußsche Formel (3) als eine Verallgemeinerung der elementaren Formel:

$$(4) \qquad \sin x = 2^{n-1} \cdot \prod_{s=0}^{s=n-1} \sin \frac{x+s\pi}{n}$$

anzusehen, die von Euler[8]) herrührt; um (4) zu erhalten, braucht man in der Tat nur in (3) $1-x$ für x einzuführen; vertauscht man dann die Faktorenfolge rechter Hand, so gibt eine Multiplikation der beiden so erhaltenen Formeln unmittelbar (4).

Wir werden in § 76 noch eine Verallgemeinerung des Gaußschen Multiplikationstheorems, und zwar unter Anwendung eines bestimmten Integrales, herleiten.

---

1) Comment. Gotting. Bd. 2, p. 30; 1812. Werke, Bd. III, p. 149—150. Deutsche Ausgabe, p. 44—47.

2) Opera posthuma Bd. I; 1860. Darboux Bulletin (2) Bd. 4; 1880. Lacroix, Traité de calc. diff. et intégr., Bd. III, p. 480; Paris 1819.

3) Exercices de calcul intégral, Bd. II, p. 23; 1817. Traité des fonct. ellipt. et des intégr. Eulériennes Bd. II, p. 445; 1826.

4) Journal für Mathematik, Bd. 7, p. 375; 1831.

5) Exercices de Math. IIe année, p. 91—92; 1827. Exercices d'Analyse et de la Physique math. Bd. II, p. 407—408; 1841.

6) Journal für Mathematik Bd. 15, p. 258—263; 1836. Werke, Bd. I, p. 273—278.

7) Bulletin de la Soc. Math. de France, Bd. 9, p. 162—166; 1880.

8) Introductio in Analysin infinitorum, art. 240.

Für $n = 2$ findet man aus (3) die speziellere Formel:

$$\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma(x)\Gamma(x+\tfrac{1}{2}), \tag{5}$$

welche Legendre[1]) angehört und sehr häufig in den Anwendungen der Gammafunktion auftritt.

Die Funktion $\beta(x)$ hat offenbar auch ihr Multiplikationstheorem; setzt man in (1) $2n+1$ für n und dann nacheinander $\frac{x+1}{2}$ und $\frac{x}{2}$ statt x, so findet man in der Tat wegen § 5, (13), daß:

$$(4n+2)\beta(x) = \sum_{s=0}^{s=2n}\left(\Psi\left(\frac{x+2s+1}{4n+2}\right) - \Psi\left(\frac{x+2s}{4n+2}\right)\right)$$

sein muß, woraus nach einer einfachen Reduktion die gesuchte Formel:

$$\beta(x) = \frac{1}{2n+1} \cdot \sum_{s=0}^{s=2n}(-1)^s \beta\left(\frac{x+s}{2n+1}\right)$$

folgt. Aus (5) wollen wir noch zwei bemerkenswerte Identitäten herleiten; erstens setzen wir in der genannten Formel statt x der Reihe nach

$$\frac{x}{2}, \frac{x}{4}, \frac{x}{8}, \ldots, \frac{x}{2^n};$$

die Multiplikation der so erhaltenen n Gleichungen gibt dann die Formel:

$$\Gamma(x) = \frac{2^{x(2-2^{1-n})}}{2^n} \cdot \Gamma\left(\frac{x}{2^n}\right) \cdot \prod_{s=1}^{s=n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{2^s}\right)}{\sqrt{\pi}},$$

oder, was offenbar dasselbe ist:

$$\Gamma(x+1) = 2^{x(2-2^{1-n})} \cdot \Gamma\left(1+\frac{x}{2^n}\right) \cdot \prod_{s=1}^{s=n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{2^s}\right)}{\sqrt{\pi}}; \tag{7}$$

daraus folgt, indem man n über jede Grenze hinaus wachsen läßt:

$$\Gamma(x+1) = 2^{2x} \cdot \prod_{s=1}^{s=\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{2^s}\right)}{\sqrt{\pi}}. \tag{8}$$

Die beiden Formeln (7) und (8) verdankt man Knar[2]).

---

1) Mémoires de l'Institut de France, 1809, p. 485.

2) Grunert Archiv, Bd. 41, p. 359—360; 1864.

Aus (5) und der Definition von $B(x, \frac{1}{2})$ ergibt sich die andere Identität:

$$\Gamma(x) = \sqrt{B(x, \tfrac{1}{2})} \cdot \sqrt{\frac{\Gamma(2x)}{2^{2x-1}}},$$

aus der ähnlich wie vorher die (7) ähnliche Formel:

$$\Gamma(x) = \frac{\sqrt[2^n]{\Gamma(2^n x)}}{2^{nx-1+2^{-n}}} \cdot \prod_{s=1}^{s=n} \sqrt[2^s]{B(2^{s-1}x, \tfrac{1}{2})} \tag{9}$$

folgt. Endlich findet man aus (1) und der Definition von $\beta(x)$, daß:

$$\beta(2x) + \Psi(x) = \Psi(2x) - \log 2$$

sein muß; daraus folgt die mit (9) beinahe identische Formel:

$$\sum_{s=1}^{s=n} \beta(2^s x) = \Psi(2^n x) - n \log 2 - \Psi(x). \tag{10}$$

Wir werden in Kapitel VII Formeln entwickeln, welche es uns möglich machen, die positive ganze Zahl n in (9) und (10) über jede Grenze hinauswachsen zu lassen. Die so erhaltenen Entwicklungen finden sich in § 38, (12) und § 39, (9).

§ 7. Satz von Gauß über $\Psi\left(\frac{p}{q}\right)$ und $\beta\left(\frac{p}{q}\right)$.

Gauß[1]) hat auch für den Zahlenwert $\Psi\left(\frac{p}{q}\right)$, wo $\frac{p}{q}$ einen rationalen Bruch bedeutet, einen interessanten Satz gegeben, für welchen wir hier einen von Jensen[2]) herrührenden eleganten Beweis mitteilen wollen. Um die obenerwähnten Funktionenwerte zu untersuchen, können wir uns gemäß der Differenzengleichung § 5, (3) auf denjenigen Fall beschränken, wo das Argument $p : q$ ein positiver echter Bruch ist.

Wir haben somit die unendliche Reihe:

$$C + \Psi\left(\frac{p}{q}\right) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \left(\frac{1}{s+1} - \frac{q}{p+qs}\right) \tag{1}$$

zu untersuchen, in welcher p und q positive ganze Zahlen bedeuten und $p < q$ vorausgesetzt werden soll.

---

1) Comment. Gotting. Bd. 2, p. 33—34; 1812. Werke, Bd. III, p. 155—156. Deutsche Ausgabe, p. 44—47.

2) Nyt Tidsskrift for Mathematik, Bd. 2B, p. 52—54; 1891.

Setzt man der Kürze halber:

$$S(t) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \left(\frac{1}{s+1} - \frac{q}{p+qs} \right) t^{p+qs}, \tag{2}$$

so ist diese Potenzreihe in t sicher für $|t| < 1$ konvergent; da sie indessen auch noch für $t = 1$ konvergiert, wie dies deutlich aus (1) hervorgeht, so ergibt sich aus dem Satz von **Abel**:

$$C + \Psi\left(\frac{p}{q}\right) = S(1) \cdot \tag{3}$$

Aus (2) findet man aber:

$$S(t) = -t^{p-q} \cdot \log(1 - t^q) - S_1(t), \tag{4}$$

worin

$$S_1(t) = q \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{t^{p+qs}}{p+qs} \tag{5}$$

gesetzt worden ist; ferner ist, falls $|t| < 1$ angenommen wird, während r eine ganze Zahl bedeutet:

$$-\left(te^{\frac{2r\pi i}{q}}\right)^{-p} \cdot \log\left(1 - te^{\frac{2r\pi i}{q}}\right) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\left(te^{\frac{2r\pi i}{q}}\right)^{s-p}}{s}; \tag{6}$$

endlich wird:

$$\sum_{r=0}^{r=q-1} \left(e^{\frac{2r\pi i}{q}}\right)^{s-p} = \begin{cases} q \\ 0 \end{cases},$$

je nachdem der Exponent $s - p$ durch q teilbar ist oder nicht. Setzt man also in (6) $r = 0, 1, 2, 3, \cdots, q-1$, so liefert die Addition aller so erhaltenen Gleichungen für $S_1(t)$ den Ausdruck:

$$S_1(t) = -\sum_{r=0}^{r=q-1} e^{-\frac{2pr\pi i}{q}} \cdot \log\left(1 - t \cdot e^{\frac{2r\pi i}{q}}\right);$$

daraus folgt wegen (4):

$$S(t) = -t^{p-q} \cdot \log(1 - t^q) + \sum_{r=0}^{r=q-1} e^{-\frac{2pr\pi i}{q}} \cdot \log\left(1 - t \cdot e^{\frac{2r\pi i}{q}}\right),$$

oder, was dasselbe ist:

$$S(t) = -t^{p-q} \cdot \log \frac{1-t^q}{1-t} + \sum_{r=1}^{r=q-1} e^{-\frac{2pr\pi i}{q}} \cdot \log\left(1 - t \cdot e^{\frac{2r\pi i}{q}}\right)$$
$$- (t^{p-q} - 1) \log(1 - t).$$

Läßt man nun in dieser Formel t gegen $+1$ konvergieren, so erhält man nach (3):

$$\Psi\left(\frac{p}{q}\right) + C = -\log q + \sum_{r=1}^{r=q-1} e^{-\frac{2pr\pi i}{q}} \cdot \log\left(1 - e^{\frac{2r\pi i}{q}}\right)$$

und daraus, indem man $q - p$ statt p setzt und dann die beiden so erhaltenen Gleichungen addiert:

$$\Psi\left(\frac{p}{q}\right) + \Psi\left(1 - \frac{p}{q}\right) + 2C = -2\log q + 2 \cdot \sum_{r=1}^{r=q-1} \cos\frac{2pr\pi}{q} \cdot \log\left(1 - e^{\frac{2r\pi i}{q}}\right). \tag{7}$$

Die Summe linker Hand ist aber offenbar reell; da nun:

$$1 - e^{\frac{2r\pi i}{q}} = 1 - \cos\frac{2r\pi}{q} - i\sin\frac{2r\pi}{q} = 2\sin\frac{r\pi}{q} \cdot e^{\left(\frac{r\pi}{q} - \frac{\pi}{2}\right)\cdot i},$$

d. h.:

$$\log\left(1 - e^{\frac{2r\pi i}{q}}\right) = \frac{1}{2}\log\left(2 - 2\cos\frac{2r\pi}{q}\right) + i\left(\frac{r\pi}{q} - \frac{\pi}{2} + 2\mu\pi\right),$$

so findet man schließlich vermöge (7) und unter Anwendung von § 5, (7) den Ausdruck:

$$\Psi\left(\frac{p}{q}\right) = -C - \log q - \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{cotg}\frac{p\pi}{q} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{r=1}^{r=q-1} \cos\frac{2pr\pi}{q} \cdot \log\left(2 - 2\cos\frac{2r\pi}{q}\right),$$

oder, indem man die Glieder der Summe rechter Hand in umgekehrter Reihenfolge schreibt und dann die beiden so erhaltenen Gleichungen addiert:

$$\Psi\left(\frac{p}{q}\right) = -C - \log q - \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{cotg}\frac{p\pi}{q} + \sum_{r=1}^{\leq\frac{q}{2}}{}' \cos\frac{2pr\pi}{q} \cdot \log\left(2 - 2\cos\frac{2rp}{q}\right), \tag{8}$$

wo der Akzent nach dem Summenzeichen bedeutet, daß das letzte Glied für gerade q zu halbieren ist.

Beachtet man noch die aus § 5, (13) folgende Identität:

$$2\beta\left(\frac{p}{q}\right) = \Psi\left(\frac{p+q}{2q}\right) - \Psi\left(\frac{p}{2q}\right),$$

so ergibt sich aus (8) nach einer einfachen Reduktion die ähnliche Formel:

$$(9) \quad \beta\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{\pi}{2 \sin \frac{p\pi}{q}} - \sum_{r=0}^{\leq \frac{q-1}{2}} \cos \frac{p(2r+1)\pi}{q} \cdot \log\left(2 - 2\cos\frac{(2r+1)\pi}{q}\right).$$

Die Integraldarstellungen des § 68 gewähren uns ein Mittel, um die beiden Formeln (8) und (9) ebenso elementar, aber von einem ganz anderen Gesichtspunkte aus herzuleiten.

§ 8. Über $\Gamma(u+iv)$ für reelle u und v.

Um die Funktion $\Gamma(u+iv)$, wo $u+iv$ eine gewöhnliche komplexe Variable bedeutet, zu untersuchen, gehen wir von der Produktformel § 4, (1) aus. Wir finden zunächst:

$$(1) \quad \log \Gamma(u+iv) = -C\cdot(u+iv) - \log(u+iv) + \sum_{s=1}^{s=\infty}\left(\frac{u+iv}{s} - \log\left(1+\frac{u+iv}{s}\right)\right).$$

Es ist aber offenbar:

$$\log\left(1+\frac{u+iv}{s}\right) = \log\left(1+\frac{u}{s}\right) + \log\left(1+\frac{iv}{u+s}\right)$$

und:

$$\log\left(1+\frac{iv}{u+s}\right) = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{v^2}{(u+s)^2}\right) + i \operatorname{arctg}\frac{v}{u+s};$$

setzt man also noch:

$$\frac{v}{s} = \left(\frac{v}{s} - \frac{v}{u+s}\right) + \frac{v}{u+s},$$

so läßt sich die Formel (1) auch folgendermaßen darstellen:

$$(2) \quad \log \Gamma(u+iv) = \log\Gamma(u) - P(u,v) + i\big(\Theta(u,v) + v\,\Psi(u)\big),$$

wo wir der Kürze halber allgemein:

$$(3) \quad P(x,y) = \frac{1}{2}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\log\left(1+\frac{y^2}{(x+s)^2}\right),$$

$$(4) \quad \Theta(x,y) = \sum_{s=0}^{s=\infty}\left(\frac{y}{x+s} - \operatorname{arctg}\frac{y}{x+s}\right)$$

gesetzt haben, die mehrdeutigen Funktionen rechter Hand aber so zu definieren sind, daß sie mit y verschwinden.

Aus den Definitionen (3), (4) schließt man unmittelbar, daß $P(x,y)$ und $\Theta(x,y)$ analytische Funktionen der beiden komplexen

Variablen x und y sein müssen, vorausgesetzt, daß weder x noch $x \pm iy$ gleich Null oder einer negativen ganzen Zahl angenommen werden; aus denselben Definitionen fließen auch ohne weiteres die Fundamentalformeln:

$$P(x+1, y) = P(x, y) - \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right), \tag{5}$$

$$\Theta(x+1, y) = \Theta(x, y) - \left(\frac{y}{x} - \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right), \tag{6}$$

$$\lim_{n=\infty} P(x+n, y) = 0, \quad \lim_{n=\infty} \Theta(x+n, y) = 0, \tag{7}$$

wo n eine ganze Zahl bedeutet, und:

$$P(x, -y) = P(x, y), \quad \Theta(x, -y) = -\Theta(x, y), \tag{8}$$

$$P(x, 0) = \Theta(x, 0) = 0. \tag{9}$$

Wir bemerken noch, daß die Bedingungen (5), (6), (7) völlig ausreichen, um die beiden neuen Funktionen $P(x, y)$ und $\Theta(x, y)$ vollkommen zu definieren.

Nach diesen Erörterungen kehren wir nunmehr zu Formel (2) zurück. Falls $0 < u < 1$ angenommen wird, ist offenbar für $s \geqq 1$:

$$\log\left(1+\frac{v^2}{(s+1)^2}\right) < \log\left(1+\frac{v^2}{(u+s)^2}\right) < \log\left(1+\frac{v^2}{s^2}\right);$$

weiter ergibt die bekannte Produktdarstellung für $\sin \pi x$, daß:

$$\log\left(\frac{e^{\pi u} - e^{-\pi u}}{2\pi u}\right) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \log\left(1+\frac{u^2}{s^2}\right)$$

sein muß. Da nun wegen (2):

$$|\Gamma(u+iv)| = \Gamma(u) \cdot e^{-P(u,v)}$$

ist, so ergibt sich unmittelbar das von Lerch[1]) gefundene Resultat:

$$|\Gamma(u+iv)| = \frac{k \cdot \Gamma(1+u)}{\sqrt{u^2+v^2}} \cdot \sqrt{\frac{2\pi u}{e^{\pi u} - e^{-\pi u}}}, \tag{10}$$

wo $1 < k < \sqrt{1+v^2}$ zu setzen ist, während sämtliche Quadratwurzeln positiv zu nehmen sind.

Für den speziellen Fall $u = 0$ findet man aus § 4, (6), daß:

$$v^2 \Gamma(-iv)\Gamma(iv) = \frac{2\pi v}{e^{\pi v} - e^{-\pi v}}$$

oder, weil $\Gamma(iv)$ und $\Gamma(-iv)$ konjugierte komplexe Zahlen sind:

$$|\Gamma(iv)| = \left|\frac{1}{v}\right| \cdot \sqrt{\frac{2\pi v}{e^{\pi v} - e^{-\pi v}}} \tag{11}$$

sein muß.

1) Zitat von Godefroy, La fonction gamma, p. 15; Paris 1902.

Indem man das Zeichen von i ändert, findet man aus der Definition (2) noch zwei neue Darstellungen der Funktionen P und Θ:

$$(12)\qquad P(x, y) = \log \Gamma(x) - \frac{1}{2}\left(\log \Gamma(x+iy) + \log \Gamma(x-iy)\right),$$

$$(13)\qquad \Theta(x, y) = \frac{1}{2i}\left(\log \Gamma(x+iy) - \log \Gamma(x-iy)\right) - y\,\Psi(x);$$

mittels der Formel § 4, (6) findet man somit allgemein:

$$(14)\qquad P(1-x, y) + P(x, y) = \frac{1}{2}\cdot\log\left(\frac{e^{2\pi y}+e^{-2\pi y}-2\cos 2\pi x}{4\sin^2 \pi x}\right),$$

$$(15)\qquad \Theta(x, y) - \Theta(1-x, y) + \frac{1}{2i}\cdot\log\left(\frac{\sin\pi(x-iy)}{\sin\pi(x+iy)}\right) + \pi y \operatorname{cotg} \pi x.$$

Aus (14) findet man endlich für $x = \frac{1}{2}$ noch:

$$(16)\qquad P\left(\frac{1}{2}, y\right) = \frac{1}{2}\cdot\log\left(\frac{e^{\pi y}+e^{-\pi y}}{2}\right);$$

dagegen liefert (12) die ähnliche spezielle Formel:

$$(17)\qquad P(1, y) = \frac{1}{2}\cdot\log\left(\frac{e^{\pi y}-e^{-\pi y}}{2\pi y}\right).$$

Kapitel II.

Die Funktionen $P_a(x)$ und $Q_a(x)$.

§ 9. Einführung der Funktionen $P_a(x)$ und $Q_a(x)$.

Wir haben in § 4 bemerkt, daß die Gammafunktion in der ganzen endlichen x-Ebene eine in x meromorphe Funktion ist, die in den Punkten $0, -1, -2, -3, \cdots$ einfache Pole hat, und daß das Residuum der Pole $-n$ gleich $(-1)^n : n!$ ist. Die neue Funktion:

$$(1)\qquad P_a(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{s!}\cdot\frac{a^{x+s}}{x+s},$$

wo a eine von Null verschiedene endliche Größe bedeutet, und wo

$$a^x = e^{x\log a}$$

zu setzen ist, indem man $\log a$ so bestimmt, daß er für positive a reell wird, hat dann offenbar dieselben Pole und Residuen wie $\Gamma(x)$,

so daß die Differenz $\Gamma(x) - P_a(x)$ eine in x ganze transzendente Funktion sein muß.

Aus (1) findet man:

$$x \cdot P_a(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s a^{x+s}}{s!} \cdot \frac{x+s-s}{x+s}$$

und daraus:

$$x \cdot P_a(x) = e^{-a} \cdot a^x + \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \cdot \frac{a^{x+s+1}}{x+s+1};$$

somit muß $P_a(x)$ der Differenzengleichung:

$$P_a(x+1) = x P_a(x) - e^{-a} \cdot a^x \tag{2}$$

Genüge leisten.

Bezeichnet nun n eine positive ganze Zahl, und ist K_n der größte Wert, den der Bruch $|x+n| : |x+n+s|$ annehmen kann, wenn s eine willkürliche ganze, nicht negative Zahl bedeutet, so findet man aus (1) den Majorantwert:

$$\left| \frac{P_a(x+n)}{\Gamma(x+n)} \right| < \frac{K_n \cdot |a^x| \cdot |a|^n}{|\Gamma(x+n)| \cdot |x+n|} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{|a|^s}{s!} = \frac{K_n \cdot |a^x| \cdot e^{|a|}}{|x+n|} \cdot \left| \frac{a^n}{\Gamma(x+n)} \right|;$$

aus ihm folgt, indem K_n immer endlich bleibt, wie groß auch n angenommen wird:

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{P_a(x+n)}{\Gamma(x+n)} \right) = 0. \tag{3}$$

Da nun die Funktion $P_a(x) + \omega(x) \cdot \Gamma(x)$, wo $\omega(x+1) = \omega(x)$ ist, die *allgemeinste* Lösung von (2) darstellt, so leuchtet ein, daß $P_a(x)$ durch die Bedingungen (2) und (3) eindeutig definiert werden kann.

Wir haben schon bemerkt, daß die Differenz:

$$Q_a(x) = \Gamma(x) - P_a(x) \tag{4}$$

eine in x ganze transzendente Funktion ist. Aus (2) findet man unmittelbar für $Q_a(x)$ die Differenzengleichung:

$$Q_a(x+1) = x \cdot Q_a(x) + e^{-a} \cdot a^x, \tag{5}$$

während (3) den Grenzwert:

$$\lim_{n=\infty} \frac{Q_a(x+n)}{\Gamma(x+n)} = 1 \tag{6}$$

liefert, wo n als positive ganze Zahl anzusehen ist. Somit leuchtet ein, daß die Bedingungen (5) und (6) für die Definition der Funktion $Q_a(x)$ ausreichend sind.

Die Funktion $P_a(x)$ kommt schon bei Legendre[1]) vor; später tritt sie in Arbeiten von Schlömilch[2]) und Gasparis[3]) auf. Prym[4]) betrachtet den Fall $a = 1$, indem er die Funktionen:

$$P(x) = P_1(x), \quad Q(x) = Q_1(x) \tag{7}$$

einführt; dieser Autor hat auch zuerst die funktionentheoretische Bedeutung der Funktionen $Q(x)$ und $P(x)$ in der Theorie der Gammafunktion klar auseinandergesetzt, während Scheefer[5]) die oben gegebenen Fundamentalgleichungen dieser Funktionen von einem allgemeinen Gesichtspunkte aus betrachtet hat. Die allgemeinen Funktionen $P_a(x)$ und $Q_a(x)$ sind von Hermite[6]) untersucht worden.

Wir wollen noch mit Lindhagen[7]) eine andere Anwendung der Gleichung (2) machen. Setzen wir zu dem Ende in (2) $a = 1$ und dividieren die so erhaltene Formel mit $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, so erhalten wir:

$$\frac{eP(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{eP(x)}{\Gamma(x)} - \frac{1}{\Gamma(x+1)};$$

daraus ergibt sich das endliche Integral:

$$\Delta^{-1}\left(\frac{1}{\Gamma(x+1)}\right) = -\frac{eP(x)}{\Gamma(x)} + \omega(x), \tag{8}$$

wo $\omega(x)$ der Periodizitätsbedingung $\omega(x+1) = \omega(x)$ Genüge leistet, sonst aber ganz willkürlich angenommen werden darf.

§ 10. Die Funktionenwerte $P_a(n)$ und $Q_a(n)$ für ganze n.

Die Definitionen § 9, (1) und (4) gestatten uns, die Funktionenwerte $P_a(n)$ und $Q_a(n)$ mittels elementarer Funktionen in endlicher Form darzustellen, falls n eine ganze Zahl ist. Aus (1) folgt zunächst für $x = 1$:

$$P_a(1) = 1 - e^{-a} \tag{1}$$

---

1) Exercices de calcul intégral Bd. I, p. 339—343; 1811. Traité des fonctions elliptiques et des intégrales Eulériennes, Bd. II, p. 501—509; 1826.

2) Grunert Archiv, Bd. 11, p. 179; 1848. Zeitschrift für Math. und Physik Bd. 4, p. 396; 1859. Ebenda Bd. 16, p. 261—262; 1871.

3) Accademia di Napoli Rendiconti Bd. 6; 1867. Giornale di matematiche, Bd, 6; 1867.

4) Journal für Mathematik Bd. 82, p. 165—172; 1876.

5) Ebenda Bd. 97, p. 230—242; 1884.

6) Ebenda Bd. 90, p. 332—338; 1881.

7) Dissertation, p. 43; Stockholm, 1887.

und demnach aus § 9, (4):

$$Q_a(1) = e^{-a}. \tag{2}$$

Durch wiederholte Anwendung der Gleichung § 9, (2), welche wir in die Form:

$$\frac{P_a(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{P_a(x)}{\Gamma(x)} - \frac{e^{-a} a^x}{\Gamma(x+1)}$$

bringen, ergibt sich dann, wenn n ein positive ganze Zahl bedeutet, daß:

$$\frac{P_a(x+n)}{\Gamma(x+n)} = \frac{P_a(x)}{\Gamma(x)} - e^{-a} \cdot \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{a^{x+s}}{\Gamma(x+s+1)} \tag{3}$$

sein muß; läßt man aber in (3) n über jede Grenze hinauswachsen, so ergibt sich wegen § 9, (3) die Entwicklung in eine Fakultätenreihe:

$$P_a(x) = e^{-a} \cdot a^x \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{a^s}{x(x+1)\cdots(x+s)}, \tag{4}$$

die in der ganzen x-Ebene außer in dem Pole von $P_a(x)$ anwendbar ist.

Die Entwicklung (4) verdankt man Legendre[1]); sie ist später von Hočevar[2]) und für $a = 1$ von Bourguet[3]) wiedergefunden worden.

Setzt man weiter in (3) $x = 1$ und $n - 1$ statt n, so findet man gemäß (1) die Formel:

$$P_a(n) = (n-1)! \left(1 - e^{-a} \cdot \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{a^s}{s!}\right). \tag{5}$$

Aus § 9, (5) folgt in ähnlicher Weise:

$$\frac{Q_a(x+n)}{\Gamma(x+n)} = \frac{Q_a(x)}{\Gamma(x)} + e^{-a} \cdot \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{a^{x+s}}{\Gamma(x+s+1)} \tag{6}$$

und daraus wegen (2):

$$Q_a(n) = (n-1)!\, e^{-a} \cdot \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{a^s}{s!}. \tag{7}$$

---

1) Exercices de calcul intégral, Bd. I, p. 343; 1811. Traité des fonct. ellipt. et des intégrales Eulériennes, Bd. II, p. 505; 1826.

2) Zeitschrift für Math. und Physik, Bd. 21, p. 449—450; 1876.

3) Comptes rendus, Bd. 96, p. 1307; 1883.

Um nun auch die Funktion $Q_a(x)$ für ganze, nicht positive Werte von x zu berechnen, schreibt man die Formel (6) folgendermaßen:

$$Q_a(x) = \frac{Q_a(x+n)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} - e^{-a}\cdot\sum_{s=0}^{s=n-1}\frac{a^{x+s}}{x(x+1)\cdots(x+s)},$$

aus der für $x = -n$, n als positiv und ganz vorausgesetzt:

$$(8)\qquad Q_a(-n) = \frac{(-1)^n}{n!}\cdot\left(Q_a(0) - \frac{e^{-a}}{a^n}\cdot\sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s(n-s-1)!\,a^s\right)$$

folgt, so daß man nur den Wert $Q_a(0)$ zu bestimmen hat.

Zu dem Ende gehen wir von der Formel § 9, (4):

$$Q_a(x) = \frac{\Gamma(x+1)-1}{x} - \left(P_a(x) - \frac{a^x}{x}\right) - \frac{a^x-1}{x}$$

aus; die Annahme $x = 0$ gibt dann mit Rücksicht auf § 5, (5), (10) und § 9, (1) unmittelbar den gesuchten Wert, nämlich:

$$(9)\qquad Q_a(0) = -C - \log a + \sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s}{(s+1)!}\cdot\frac{a^{s+1}}{s+1}.$$

Dieser Funktionswert steht offenbar mit dem Integrallogarithmus in sehr naher Verbindung.[1])

Nach diesen Erörterungen ist es nun auch sehr leicht, Ausdrücke für die Funktionswerte $Q_a^{(1)}(n)$ herzuleiten. Zu diesem Zwecke schreiben wir vermöge (2) die Formel § 9, (5) unter der Form:

$$\frac{Q_a(x+1) - Q_a(1)}{x} = Q_a(x) + e^{-a}\cdot\frac{a^x-1}{x}.$$

Daraus folgt für $x = 0$:

$$(10)\qquad Q_a^{(1)}(1) = Q_a(0) + e^{-a}\cdot\log a;$$

schreibt man nunmehr die Formel (6) folgendermaßen:

$$Q_a(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}\left(\frac{Q_a(x+n)}{\Gamma(x+n)} - e^{-a}\cdot\sum_{s=0}^{s=n-1}\frac{a^{x+s}}{\Gamma(x+s+1)}\right),$$

so findet man für $x = 0$ gemäß § 5, (11), (6) und unter Anwendung von (7):

$$(11)\qquad \begin{cases} Q_a(0) = \dfrac{Q_a^{(1)}(n)}{(n-1)!} - \dfrac{Q_a(n)\cdot(\lambda(n-1) - C)}{(n-1)!} + \\ \quad + e^{-a}\cdot\displaystyle\sum_{s=1}^{s=n-1}\frac{(\lambda(s) - C)\cdot a^s}{s!} - e^{-a}\cdot\log a\cdot\sum_{s=0}^{s=n-1}\frac{a^s}{s!}, \end{cases}$$

---

1) Man vergleiche meine Abhandlung: *Sur une intégrale définie*, Mathematische Annalen Bd. 59, p. 91—102; 1904.

wo der Kürze halber für $s \geqq 1$:

$$\lambda(s) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{s}$$

gesetzt worden ist.

Wendet man endlich die aus § 9, (4) hergeleitete Identität:

$$Q_a^{(1)}(1) + P_a^{(1)}(1) = -C$$

an, so findet man aus (9), (10) und § 9, (1) die weitere Formel:

$$P_a^{(1)}(1) = \lim_{x=0} \left(P_a(x) - \frac{1}{x} \right). \tag{12}$$

§ 11. Auflösung einer Differenzengleichung.

Mellin[1]) hat folgende Verallgemeinerung der Differenzengleichungen § 9, (2), (5) für $P(x)$ und $Q(x)$ untersucht:

$$H(x+1) = r(x) \cdot H(x) + R(x), \tag{1}$$

wo $r(x)$ und $R(x)$ rationale Funktionen in x bedeuten. Hier müssen wir uns indessen mit Lindhagen[2]) auf folgenden Spezialfall von (1) beschränken:

$$H(x+1) = xH(x) + R(x), \tag{2}$$

wo $R(x)$ eine *ganze* rationale Funktion in x bezeichnet, und zwar wollen wir für diese Gleichung die elegante Lösung von Jensen[3]) mitteilen.

Um die Differenzengleichung (2) vollständig auflösen zu können, reicht es aus, eine einzige Lösung zu kennen; die *allgemeinste* Lösung dieser Gleichung läßt sich nämlich offenbar folgendermaßen darstellen:

$$H(x) = \mathfrak{H}(x) + \omega(x) \cdot \Gamma(x), \tag{3}$$

wo $\mathfrak{H}(x)$ eine *willkürliche* Lösung von (2) bedeutet, während $\omega(x)$ der gewöhnlichen Periodizitätsbedingung $\omega(x+1) = \omega(x)$ Genüge leistet, sonst aber ganz beliebig angenommen werden darf.

Eine partikuläre Lösung der Gleichung (2) läßt sich indessen leicht darstellen; man findet nämlich aus (2) für die partikuläre Lösung $\mathfrak{H}(x)$, daß:

$$\frac{\mathfrak{H}(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{\mathfrak{H}(x)}{\Gamma(x)} + \frac{R(x)}{\Gamma(x+1)}$$

sein muß. Setzt man nun in dieser Gleichung statt x der Reihe

1) Acta Mathematica Bd. 15, p. 317—384; 1891.

2) Dissertation, p. 45 ff. Stockholm 1887.

3) Nyt Tidsskrift for Mathematik, Bd. 2 B. p. 60; 1891.

nach $x+1$, $x+2, \cdots, x+p$, so ergibt die Addition aller so erhaltenen Formeln:

$$(4) \qquad \frac{\mathfrak{H}(x+p)}{\Gamma(x+p)} = \frac{\mathfrak{H}(x)}{\Gamma(x)} + \sum_{s=0}^{s=p-1} \frac{R(x+s)}{\Gamma(x+s+1)}.$$

Läßt man aber in (4) die positive ganze Zahl p über jede Grenze hinauswachsen, so erhält man offenbar rechter Hand gemäß § 1, (2) eine konvergente Reihe; die Funktion linker Hand muß daher auch einem endlichen und bestimmten Grenzwert zustreben, der offenbar eine in x periodische Funktion mit der additiven Periode $+1$ sein muß. Wir wollen nun über die partikuläre Lösung $\mathfrak{H}(x)$ derart verfügen, daß der obenerwähnte Grenzwert eine Konstante K wird, und setzen demnach:

$$(5) \qquad \lim_{p=\infty} \frac{\mathfrak{H}(x+p)}{\Gamma(x+p)} = K.$$

Nach diesen Erörterungen findet man aber für $\mathfrak{H}(x)$ den Ausdruck:

$$(6) \qquad \mathfrak{H}(x) = K \cdot \Gamma(x) - \Gamma(x) \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{R(x+s)}{\Gamma(x+s+1)},$$

welcher sich noch etwas umformen läßt.

Schreiben wir das ganze Polynom $R(x)$ vom n^{ten} Grade in x unter dieser Form:

$$(7) \qquad R(x) = a_0 + \sum_{s=1}^{s=n} a_s \cdot x(x-1) \cdots (x-s+1),$$

wo die Koeffizienten a_p von x unabhängig sein sollen, so lassen sich diese Koeffizienten ohne Mühe bestimmen, indem man in (7) nacheinander $x = 0, 1, 3, \cdots, n$ einsetzt; die vollständige Induktion ergibt dann:

$$(8) \qquad p!\, a_p = \Delta^p R(0) = \sum_{s=0}^{s=p} (-1)^s \binom{p}{s} R(p-s).$$

Mit dieser Bestimmung der Koeffizienten a_p muß (7) eine *formale Identität* sein, denn diese algebraische Gleichung n^{ten} Grades in x hat $n+1$ verschiedene Wurzeln, nämlich $x = 0, 1, 2, \cdots, n$.

Die Formel (7) ergibt aber:

$$\frac{R(x+s-1)}{\Gamma(x+s)} = \sum_{p=0}^{p=n} \frac{a_p}{\Gamma(x+s-p)};$$

daraus folgt wegen § 10, (4):

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{R(x+s)}{\Gamma(x+s+1)} = e \cdot \sum_{p=0}^{p=n} \frac{a_p P(x-p)}{\Gamma(x-p)},$$

somit finden wir für unsere partikuläre Lösung $\mathfrak{H}(x)$ den einfacheren Ausdruck:

$$\mathfrak{H}(x) = K \cdot \Gamma(x) - e \cdot P(x) \cdot \sum_{s=0}^{s=n} \frac{\Delta^s R(0)}{s!} - \sum_{s=1}^{s=n} \frac{\Delta^s R(0)}{s!} \cdot f_s(x), \tag{9}$$

wo der Kürze halber:

$$f_s(x) = \sum_{r=1}^{r=s} (s-r)! \binom{x-1}{s-r} \tag{10}$$

gesetzt worden ist.

Es leuchtet ein, daß unsere Funktion $\mathfrak{H}(x)$ durch die Gleichungen (2) und (5) vollkommen definiert ist.

§ 12. Über $P_a(x)$ für reelle a und x.

Wir nehmen jetzt an, der Parameter a in unserer Funktion $P_a(x)$ sei eine positive Größe, und wollen unter dieser Voraussetzung einige allgemeine Resultate über das Zeichen von $P_a(x)$ für verschiedene reelle x herleiten.

Erstens liefert die Fakultätenreihe § 10, (4) den Satz:

Für positive a und x ist die Funktion $P_a(x)$ immer positiv.

Für unsere weiteren Untersuchungen brauchen wir einen Hilfssatz, der unmittelbar aus § 10, (3) hergeleitet werden kann; setzt man nämlich dort $n = 2$ und $x - 2$ für x, so erhält man:

$$e^a P_a(x-2) = \frac{e^a P_a(x) + a^{x-2}(a+x-1)}{(x-1)(x-2)}; \tag{1}$$

da nun für $x \leqq -a+1$ sowohl $x-1$ als $x-2$ negativ sind, so hat man offenbar den gesuchten Hilfssatz:

Falls $P_a(x)$ negativ ist, und $x \leqq -a+1$ vorausgesetzt wird, ist sicher auch $P_a(x-2)$ negativ.

Nach diesen allgemeinen Erörterungen wollen wir nunmehr den folgenden Satz beweisen:

Bedeutet a eine willkürliche endliche positive Größe, und ist p eine ganze, nicht negative Zahl, so ist die Funktion $P_a(x)$ in den Intervallen

$$-2p > x > -2p-1 \tag{2}$$

immer negativ.

Um diesen Satz zu beweisen, setzen wir $x = -n - y$, wo $0 < y < 1$, dann ist offenbar $-n > x > -n-1$; somit liefert die Formel § 10, (4) für unsere Funktion $P_a(x)$ den Ausdruck:

$$(3) \qquad (-1)^{n+1} a^{-x} e^a P_a(x) = A_n - A_{n-1} + A_{n-2} - \cdots + (-1)^n A_0 + \\ + A_{n+1} + A_{n+2} + \cdots,$$

wo wir der Kürze halber für $0 \leqq r \leqq n$:

$$(4) \qquad A_r = \frac{a^r}{(n+y)(n+y-1)\cdots(n+y-r)}$$

und für $r > n$:

$$(5) \quad A_r = \frac{a^r}{(n+y)(n+y-1)\cdots(1+y)y(1-y)\cdots(r-n-y)}$$

gesetzt haben; die Größen A_r sind also sämtlich positiv. Aus der Definition (4) findet man unmittelbar:

$$(6)\ A_r - A_{r-1} = \frac{a^{r-1}}{(n+y)(n+y-1)\cdots(n+y-r+1)}\left(\frac{a}{n+y-r} - 1\right),$$

wo man also $r \leqq n$ voraussetzen muß.

Wir haben nun zwei verschiedene Fälle zu unterscheiden, je nachdem $0 < a < 1$ oder $a \geqq 1$ vorausgesetzt wird.

1) $0 < a < 1$; hier ergibt (6) für $r \leqq n-1$ sicher

$$A_r - A_{r-1} < 0;$$

da nun wegen (3) immer:

$$(7) \quad (-1)^{n+1} a^{-x} P_a(x) > A_n - A_{n-1} + A_{n-2} - \cdots + (-1)^n A_0$$

sein muß, so folgt für *gerade* n die gesuchte Ungleichheit

$$P_a(x) < 0;$$

denn die Summe rechter Hand in (7) ist ja dann immer *positiv*. Liegt x aber im Intervalle

$$-2n > x > -2n-1, \quad n \geqq 0,$$

dann ist sicher $x < -a+1$, und somit ist unserem Hilfssatze zufolge $P_a(x)$ in den Intervallen (2) immer *negativ*.

2) $a \geqq 1$. Wir setzen $2m+1 \leqq a < 2m+3$, wo m eine ganze, nicht negative Zahl bedeutet; wenn außerdem $n - r \leqq 2m$ vorausgesetzt wird, dann ist sicher wegen (6)

$$(8) \qquad A_r - A_{r-1} > 0.$$

Setzt man wieder n als *gerade* voraus, so braucht man die Ungleichung (8) nur für $r \geqq 2$ in Betracht zu ziehen, denn das letzte Glied rechter Hand in (7) ist dann sicher positiv; somit findet man auch hier

$$P_a(x) < 0$$

in den Intervallen $-2n > x > -2n-1$ für $0 \leqq n \leqq m+1$; denn wir haben gesehen, daß die Ungleichung (8) sicher anwendbar ist, falls $n \leqq m+1$ vorausgesetzt wird.

In dem letzten der obengenannten Intervalle

$$-2m-2 > x > -2m-3$$

ist aber sicher $x \leqq -a+1$; somit ist unser Satz auch für $a \geqq 1$ bewiesen.

Wir wollen nun noch den folgenden spezielleren Satz beweisen:

Es sei n eine ganze, nicht negative Zahl und $2m+1 \leqq a < 2m+3$, dann ist $P_a(x)$ in den Intervallen $-2n-1 < x < -2n-2$ immer positiv, wenn n eine solche ganze Zahl bedeutet, daß $0 \leqq n \leqq m$ ist.

Die Ungleichheit (8) ist nämlich dann auch für $r = 1$ anwendbar; somit ergibt (7) unmittelbar das gewünschte Resultat.

Es ist mir indessen nicht gelungen, die übrigen Intervalle für $n > m$ in dieser Allgemeinheit zu untersuchen.

§ 13. Satz von Bourguet über die Nullstellen von $P(x)$.

Nach den allgemeineren Erörterungen des vorhergehenden Paragraphen setzen wir speziell $a = 1$ und wollen nunmehr den folgenden Satz von Bourguet[1]) beweisen.

Die Funktion $P(x)$ hat in jedem der Intervalle

$$-2n-1 > x > -2n-\frac{3}{2}, \quad -2n-\frac{3}{2} > x > -2n-2$$

von $n = 2$ an mindestens eine Nullstelle, hat aber sonst keine reelle Nullstelle.

Den Sätzen des § 12 zufolge kann $P(x)$ keine reellen Nullstellen besitzen außer in dem Intervalle $-2n-1 > x > -2n-2$ von $n > 1$ an.

Wir wollen nun zuerst beweisen, daß $P(x)$ im Intervalle $-3 > x > -4$ immer *positiv* ist.

Zu dem Ende setzen wir $x = -3-y$, wo also wie gewöhnlich $0 < y < 1$ ist; die Formel § 10, (3) ergibt dann für $n = 4$:

$$e \cdot P(-3-y) = \frac{eP(1-y) + 1 - y - y(1+y)^2}{y(1+y)(2+y)(3+y)}; \tag{1}$$

weiter findet man gemäß § 9, (2) für $a = 1$, $x = 1-y$:

$$e \cdot P(1-y) = \frac{eP(2-y)+1}{1-y}; \tag{2}$$

1) Comptes rendus, Bd. 96, p 1309; 1883.

aus der Fakultätenreihe § 10, (4) folgt ferner für $a = 1$:

$$P(x) > P(x + h),$$

wenn x und h beide positiv sind; daher folgt aus (2):

$$eP(1 - y) > \frac{eP(2) + 1}{1 - y} = \frac{e - 1}{1 - y} > \frac{1}{1 - y}, \tag{3}$$

denn aus § 9, (2) findet man für $n = 2$, $a = 1$, daß:

$$eP(2) = e - 2$$

sein muß.

Nun ist der Nenner rechter Hand in (1) offenbar positiv, also findet man gemäß (3):

$$eP(-3 - y) > \frac{1 + (1 - y)^2 - y(1 - y)(1 + y)^2}{(1 - y)y(1 + y)(2 + y)(3 + y)} = \frac{A}{B}; \tag{4}$$

bezeichnet aber y einen positiven, echten Bruch, so ist immer:

$$y(1 - y) \leqq \frac{1}{4};$$

für den Zähler A rechter Hand in (4) findet man daher:

$$A \geqq 1 + (1 - y)^2 - \frac{1}{4}(1 + y)^2 = \frac{(3y - 7)(y - 1)}{4};$$

für $0 < y < 1$ folgt daraus $A > 0$ und somit auch $P(-3 - y) > 0$ womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Betreffs der folgenden Intervalle $-2n - 1 < x < -2n - 2$ von $n = 2$ an behaupte ich, daß immer:

$$P\left(-\frac{4n + 3}{2}\right) < 0 \tag{5}$$

sein muß. Wir ziehen zunächst $P\left(-\frac{11}{2}\right)$ in Betracht und setzen in (1) $y = \frac{5}{2}$, dann erhält man:

$$\frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{16} \cdot eP\left(-\frac{11}{2}\right) = eP\left(-\frac{3}{2}\right) - \frac{257}{8}; \tag{6}$$

nun ergibt aber die Fakultätenreihe § 10, (4) für $a = 1$ und $x = -\frac{3}{2}$:

$$eP\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \frac{8}{9}\left(1 + \frac{2}{5} + \frac{2^2}{5 \cdot 7} + \frac{2^3}{5 \cdot 7 \cdot 9} + \cdots\right);$$

daraus folgt:

$$eP\left(-\frac{3}{2}\right) < \frac{2}{3} + \frac{8}{9}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right) = \frac{22}{9};$$

somit findet man aus (6):

$$\frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{16} \cdot eP\left(1 - \frac{11}{2}\right) < \frac{22}{9} - \frac{257}{8} < 0,$$

so daß $P\left(-\frac{11}{2}\right)$ *negativ* sein muß, und der Hilfssatz in § 12 zeigt demnach die Richtigkeit der allgemeinen Ungleichung (5).

$P(x)$ kann also in den Intervallen $-2n-1 > x > -2n-2$ negativ sein, falls $n \geq 2$ angenommen wird.

Es ist indessen leicht zu beweisen, daß $P(x)$ in diesen Intervallen auch positiv sein kann. Zu dem Ende bezeichnen wir mit δ und ε beliebig kleine, positive Größen; die Definition § 9, (1) ergibt dann:

$$P(-2n-1-\delta) = \frac{1}{(2n+1)!\,\delta} + a_0 + a_1\delta + \cdots,$$

$$P(-2n-2+\varepsilon) = \frac{1}{(2n+2)!\,\varepsilon} + b_0 + b_1\varepsilon + \cdots,$$

worin man offenbar δ und ε so klein annehmen kann, daß $P(-2n-1-\delta)$ und $P(-2n-2+\varepsilon)$ beide *positiv* sind.

Nun ist aber in dem betreffenden Intervalle $P(x)$ eine reelle, kontinuierliche Funktion der reellen Veränderlichen x, welche in der Mitte der Intervalle *negativ*, an den beiden Endpunkten dagegen *positiv* ist, also muß $P(x)$ mindestens zweimal in jedem dieser Intervalle verschwinden, und damit ist unser Satz bewiesen.

Betreffs der negativen Werte von $P(x)$ in den obenerwähnten Intervallen hat Bourguet[1]) darauf aufmerksam gemacht, daß ihre absoluten Beträge sehr klein sein müssen; man hat nämlich aus § 9, (2):

$$P(x) = \frac{1}{ex} + \frac{P(x+1)}{x};$$

ist also $-2n-1 > x > -2n-2$, d. h. $-2n > x+1 > -2n-1$, so ist offenbar $P(x+1)$ positiv, und somit $P(x) > \frac{1}{ex}$, d. h. für $P(x) < 0$:

$$|P(x)| < \frac{1}{e|x|}.$$

Bourguet[2]) hat außerdem zu beweisen versucht, daß $P(x)$ nicht mehr als vier komplexe Nullstellen besitzen kann; sein Beweis für diese Behauptung ist indessen nicht genau.

Über die Nullstellen von $Q_a(x)$, für positive a, haben wir später in § 81 zu sprechen.

1) Comptes rendus, Bd. 96, p. 1309; 1883.
2) Ebenda Bd. 96, p. 1487—1490; 1883.

Kapitel III.

Entwicklungen in Potenzreihen.

§ 14. Entwicklungen von $\Psi(1 \pm x)$, $\beta(1 \pm x)$ und $\log \Gamma(1 \pm x)$.

Aus den Definitionen § 5, (2), (12) der beiden Funktionen $\Psi(x)$ und $\beta(x)$:

$$\Psi(x) = -C + \sum_{s=0}^{s=\infty}\left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{x+s}\right),$$

$$\beta(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s}{x+s}$$

findet man die anderweiten Entwicklungen:

$$\Psi^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\cdot n!\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{1}{(x+s)^{n+1}}, \tag{1}$$

$$\beta^{(n)}(x) = (-1)^{n}\cdot n!\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s}{(x+s)^{n+1}}; \tag{2}$$

setzt man daher der Kürze halber:

$$\begin{cases} s_1 = C = \lim\limits_{n=\infty}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right), \\ s_n = \frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \cdots, \qquad n \geqq 2 \end{cases} \tag{3}$$

$$\sigma_n = \frac{1}{1^n} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \cdots, \qquad n \geqq 1, \tag{4}$$

so erhält man die Potenzreihen:

$$\Psi(1+x) = -s_1 + s_2 x - s_3 x^2 + s_4 x^3 - s_5 x^4 + \cdots, \tag{5}$$

$$\beta(1+x) = \sigma_1 - \sigma_2 x + \sigma_3 x^2 - \sigma_4 x^3 + \sigma_5 x^4 - \cdots, \tag{6}$$

welche beide im Innern des Kreises $|x| = 1$ konvergieren, und deren Koeffizienten von $n = 2$ an wegen (3) und (4) durch die Relation:

$$\sigma_n = \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)\cdot s_n \tag{7}$$

verbunden sind.

Man kann die Reihen (5) und (6) noch etwas umformen, so daß sie für die numerische Rechnung bequemer werden. Zu diesem Zwecke

ändern wir das Zeichen von x und erhalten dann unter Anwendung von § 5, (7) und (14) die beiden neuen Entwicklungen:

$$\Psi(1+x) = \frac{1}{2x} - \frac{\pi}{2}\cot \pi x - \sum_{r=0}^{r=\infty} s_{2r+1} \cdot x^{2r}, \tag{8}$$

$$\beta(1+x) = \frac{1}{2x} - \frac{\pi}{2\sin \pi x} + \sum_{r=0}^{r=\infty} \sigma_{2r+1} \cdot x^{2r}; \tag{9}$$

da nun aber für $|x| < 1$

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \cdots$$

ist, so gewinnt man endlich aus (8) und (9) die zwei noch rascher konvergierenden Entwicklungen:

$$\Psi(1+x) = \frac{1}{2x} - \frac{\pi}{2}\cot \pi x - \frac{1}{1-x^2} + \sum_{r=0}^{r=\infty} (1 - s_{2r+1}) x^{2r}, \tag{10}$$

$$\beta(1+x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2\sin \pi x} + \frac{1}{1-x^2} - \sum_{r=0}^{r=\infty} (1 - \sigma_{2r+1}) x^{2r}. \tag{11}$$

Es ist nun sehr leicht, ähnliche Entwicklungen für die Funktionen $\log \Gamma(1+x)$ und $\log B\left(\frac{1+x}{2}, \frac{1}{2}\right)$ herzuleiten. Zunächst integrieren wir die beiden Formeln (5) und (6) nach x und erhalten für $|x| < 1$:

$$\log \Gamma(1+x) = -\frac{s_1}{1}x + \frac{s_2}{2}x^2 - \frac{s_3}{3}x^3 + \frac{s_4}{4}x^4 - \cdots, \tag{12}$$

$$\log B\left(\frac{1+x}{2}, \frac{1}{2}\right) = \log \pi - \frac{\sigma_1}{1}x + \frac{\sigma_2}{2}x^2 - \frac{\sigma_3}{3}x^3 + \frac{\sigma_4}{4}x^4 - \cdots; \tag{13}$$

aus (8) und (9) findet man in ähnlicher Weise:

$$\log \Gamma(1+x) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{\pi x}{\sin \pi x}\right) - \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{1 - s_{2r+1}}{2r+1} \cdot x^{2r+1}, \tag{14}$$

$$\left\{\begin{aligned} \log B\left(\frac{1+x}{2}, \frac{1}{2}\right) &= \log \sqrt{2\pi} + \frac{1}{2}\log\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{x}\right) - \\ &\quad - \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{1 - \sigma_{2r+1}}{2r+1} \cdot x^{2r+1}; \end{aligned}\right. \tag{15}$$

schließlich liefern (10) und (11) die beiden noch rascher konvergierenden Entwicklungen:

$$\log \Gamma(1+x) = \frac{1}{2}\left[\log\left(\frac{\pi x}{\sin \pi x}\right) - \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right] + \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{1 - s_{2r+1}}{2r+1} \cdot x^{2r+1}, \tag{16}$$

$$(17)\begin{cases}\log B\left(\frac{1+x}{2}, \frac{1}{2}\right) = \log\sqrt{2\pi} + \frac{1}{2}\left[\log\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{x}\right) - \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right] + \\ \qquad + \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{1-\sigma_{2r+1}}{2r+1} \cdot x^{2r+1},\end{cases}$$

welche beide für $|x| < 2$ konvergieren. Die Formel (16) ist schon von Legendre[1]) angegeben worden.

Die numerischen Werte der Zahlen s_n sind sehr wohl bekannt. Schon Euler[2]) berechnete diese Zahlen von $n = 2$ bis $n = 16$ bis auf 16 Dezimalstellen. Legendre[3]) korrigierte dann die Tafel von Euler und gab die Werte von s_2 bis s_{35} bis auf 15 Dezimalstellen an, während Stiltjes[4]) eine Tafel der Zahlen s_2 bis s_{70} bis auf 32 Dezimalstellen berechnete.

Über die numerische Berechnung von $s_1 = C$ haben wir schon in § 2 berichtet.

Nachdem die Näherungswerte der Koeffizienten s_n berechnet sind, kann man nunmehr mit Zuhilfenahme der eben entwickelten Reihen zur Berechnung der Funktionswerte selbst übergehen.

Die erste numerische Tafel der Logarithmen der Gammafunktion rührt sicher von Legendre her; er berechnet zunächst die Werte von $\log \Gamma(1+x)$ für $x = 0{,}000$ bis $x = 0{,}500$ mit dem Intervall $d = 0{,}005$ und auf 7 Dezimalstellen.[5]) Später hat Legendre diese Tafel erweitert, indem er die Funktionswerte von $x = 0{,}000$ bis $x = 1{,}000$ mit dem Intervall $d = 0{,}001$ und zuerst[6]) mit 7, dann[7]) mit 12 Dezimalstellen gibt.

Gauß[8]) hat die Funktionswerte von $\Psi(1+x)$ und $\log \Gamma(1+x)$ von $x = 0{,}00$ bis $x = 1{,}00$ mit dem Intervall $d = 0{,}01$ und mit

1) Mémoires de l'Institut de France 1809, p. 505. Exercices de calc. intégr., Bd. I, p. 299; 1811. Traité des fonct. ellipt., Bd. II. p. 433; 1826.

2) Institutiones calculi differentialis, p. 456; 1755. Commentarii Acad. Petrop. Bd. 7, p. 133; (1734—35) 1740.

3) Exercices de calcul intégral, Bd. II, p. 65; 1817. Traité des fonct. ellipt., etc., Bd. II, p. 432; 1826.

4) Acta Mathematica, Bd. 10, p. 299—302; 1887.

5) Mémoires de l'Institut de France; 1809, p. 508—509.

6) Exercices de calcul intégral, Bd. II, p. 83—95; 1817, Bd. I, p. 302—306; 1811.

7) Traité des fonctions elliptiques et des intégrales Eulériennes, Bd. II, p. 490—499; 1826.

8) Comment. Gotting., Bd. 2, p. 44—47; 1812. Werke Bd. III, p. 161—162. Deutsche Ausgabe p. 52—54.

20 Dezimalstellen angegeben. Beinahe gleichzeitig hat Bessel[1]) die Werte von $\log\left(\frac{\Gamma(x)}{2\pi}\right)$ von $x = 1{,}00$ bis $x = 2{,}05$ auf 10 Dezimalstellen mit dem Intervalle $d = 0{,}01$ berechnet, während später Knar[2]) eine Tafel der Werte von $\Psi(x)$ für $x = 1{,}00$ bis $x = 1{,}50$ mit 7 Dezimalstellen und mit dem Intervalle, $d = 0{,}01$ geliefert hat.

Es leuchtet ein, daß man, wenn man sich auf reelle Werte beschränkt, nur die obengenannten Funktionswerte von $x = 0$ bis $x = 1$ zu berechnen nötig hat. Durch Zuhilfenahme der beiden Formeln § 4, (6) und § 6, (3) kann man diejenigen Intervalle, für welche man die Gammafunktion zu berechnen braucht, beträchtlich einschränken. Diese Aufgabe ist schon von Legendre[3]), später von Hoppe[4]) bearbeitet worden; aber zuerst Landau[5]) hat sie vollständig gelöst.

§ 15. Potenzreihenentwicklungen für $\Gamma(1+x)$ und $\frac{1}{\Gamma(1+x)}$.

Wenden wir uns nunmehr zu der Funktion $\Gamma(1+x)$ selbst, so bietet sich uns zunächst eine Potenzreihe von der Form dar:

$$\Gamma(1+x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots, \tag{1}$$

welche im Innern des Kreises $|x| = 1$ konvergiert.

Man kennt zwar die independente Darstellung der Koeffizienten c_n unter einfacher Form noch nicht; es ist aber leicht, mit Zuhilfenahme der Formel § 14, (5):

$$\Psi(1+x) = -s_1 + s_2 x - s_3 x^2 + s_4 x^3 - s_5 x^4 + \cdots, \tag{2}$$

Rekursionsformeln herzuleiten, die für die numerische Berechnung der c_n ausreichen. Die Identität:

$$\Gamma^{(1)}(1+x) = \Gamma(1+x)\cdot\Psi(x+1)$$

liefert nämlich wegen (1) und (2) die allgemeine Formel:

$$(n+1)c_{n+1} = \sum_{r=0}^{r=n}(-1)^{r+1}s_{r+1}\cdot c_{n-r}, \tag{3}$$

die in Verbindung mit dem Anfangswerte $c_0 = 1$ offenbar die sukzessive Berechnung der c_n erlaubt.

1) Abhandlungen, Bd. II, p. 342—352.
2) Grunert Archiv, Bd. 43, p. 168; 1865.
3) Traité des fonct. elliptiques etc. Bd. II, art. 118.
4) Journal für Mathematik, Bd. 40, p. 152—154; 1850.
5) Ebenda Bd. 123, p. 276—283; 1901.

Für die Koeffizienten der beständig konvergierenden Potenzreihe

$$\frac{1}{\Gamma(1+x)} = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x^3 + \cdots \tag{4}$$

läßt sich eine ähnliche Rekursionsformel herleiten; durch Multiplikation von (1) und (4) findet man ohne Mühe, daß:

$$\gamma_0 = 1, \quad \sum_{r=0}^{r=n} c_n \gamma_{n-r} = 0 \tag{5}$$

sein muß. Um eine ähnliche Rekursionsformel wie (3) auch für die γ_n herzuleiten, gehen wir von der anderen Identität:

$$D_x\left(\frac{1}{\Gamma(1+x)}\right) = -\frac{\Psi(1+x)}{\Gamma(1+x)}$$

aus und finden mittels (2) und (4) die gesuchte Formel:

$$(n+1)\gamma_{n+1} = \sum_{r=0}^{r=n} (-1)^r s_{r+1} \cdot \gamma_{n-r}. \tag{6}$$

Die hier entwickelte Methode zur Herleitung der Formel (6) ist wohl zuerst von Schlömilch[1]) angewendet worden.

Die numerische Berechnung der Koeffizienten c_n und γ_n und ähnlicher Zahlen verdankt man Bourguet[2]), welcher eine Annäherung auf 16 Dezimalstellen erzielt hat. Es ist noch zu bemerken, daß H. M. Jefferey[3]) schon früher die 11 ersten Koeffizienten jeder der 21 Potenzreihen für $\Gamma^{(n)}(x+1):n!$ für $n=0$ bis $n=20$ bis auf 10 Dezimalstellen berechnet hat.

Man kann nun auch die Funktionen $P_a(x)$ und $Q_a(x)$ in Potenzreihen entwickeln; setzt man:

$$P_a(1+x) = a^x(p_0^{(a)} + p_1^{(a)}x + p_2^{(a)}x^2 + p_3^{(a)}x^3 + \cdots), \tag{7}$$

so ist diese Reihe offenbar für $|x|<1$ konvergent, für den allgemeinen Koeffizient $p_n^{(a)}$ aber findet man ohne Mühe aus der Definition § 9, (1) den Ausdruck:

$$p_n^{(a)} = (-1)^n \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{(s+1)!} \cdot \frac{a^{s-1}}{(s+1)^{n+1}}; \tag{8}$$

für die Koeffizienten der beständig konvergierenden Potenzreihe

$$Q_a(x+1) = q_0^{(a)} + q_1^{(a)}x + q_2^{(a)}x^2 + \cdots \tag{9}$$

1) Zeitschrift für Math. und Physik, Bd. 25, p. 104; 1880.
2) Acta Mathematica, Bd. 2, pp. 289, 291; 1882.
3) Quarterly Journal, Bd. 6, p. 82—108; 1864.

kann man dann vermöge der Identität

$$Q_a(x) = \Gamma(x) - P_a(x)$$

aus (7) die entsprechenden Ausdrücke finden. Für $a = 1$ hat man z. B.:

$$q_n^{(1)} = c_n - p_n^{(1)}; \tag{10}$$

die Koeffizienten $q_n^{(1)}$ und $p_n^{(1)}$ sind gleichfalls auf 16 Dezimalstellen von Bourguet[1]) berechnet worden.

§ 16. Independente Darstellung der Koeffizienten c_n und γ_n.

Durch Auflösung der Gleichungssysteme § 15, (3) und (6) kann man die Koeffizienten c_n und γ_n mittels der Summen s_n ausdrücken; um die independente Darstellung dieser Koeffizienten bequemer herzuleiten, setzen wir identisch:

$$\Gamma(x) = e^{y(x)} \tag{1}$$

und führen weiter die Bezeichnung:

$$s_n(x) = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \cdot y^{(n)}(x) \tag{2}$$

ein, woraus speziell:

$$s_1(x) = -\Psi(x) = C + \sum_{s=0}^{s=\infty} \left(\frac{1}{x+s} - \frac{1}{1+s}\right) \tag{3}$$

und allgemein für $n > 1$:

$$s_n(x) = \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{1}{(x+r)^n}, \quad s_n(1) = s_n \tag{4}$$

folgt. Die höheren Differentialquotienten von $\Gamma(x)$ lassen sich nun mit Zuhilfenahme allgemeiner Formeln aus (1) herleiten. Ist y nämlich eine Funktion von x, so hat man[2]):

$$D_x^n F(y) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k!} \cdot T^{k,n}(y) \cdot F^{(k)}(y), \tag{5}$$

wo der Kürze halber:

$$T^{k,n}(y) = n! \sum \frac{y^{(r_1)} y^{(r_2)} \cdots y^{(r_k)}}{r_1! r_2! \cdots r_k!} \tag{6}$$

gesetzt worden ist, die Summe rechter Hand aber über alle *positiven*

---

1) Loc. cit. pp. 288, 292.

2) Man vergleiche z. B. Schlömilch, Kompendium d. höheren Analysis, Bd. II, p. 5 Formel (6); 1879. Eine einfache Rechnung bringt Schlömilchs U_k auf unsere bequemere Form $T^{k,n}$.

ganzen Werte von $r_1, r_2, r_3, \cdots, r_k$ zu erstrecken ist, die der einzigen Bedingung:

$$r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_k = n \tag{7}$$

Genüge leisten; es ist also stets zu beachten, daß eine bestimmte Kombination von k Zahlen, welche (7) befriedigen, so oft mitgerechnet werden muß, als man verschiedene Permutationen dieser k Zahlen ohne Wiederholungen bilden kann.

In unserem speziellen Falle findet man nun vermöge (2), daß

$$\Gamma^{(n)}(x) = (-1)^n n!\, \Gamma(x) \cdot \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k!} \cdot \mathfrak{T}^{k,n}(x) \tag{8}$$

sein muß, wo also:

$$\mathfrak{T}^{k,n}(x) = \sum \frac{s_{r_1}(x) s_{r_2}(x) \cdots s_{r_k}(x)}{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdots r_k} \tag{9}$$

mit der Bedingung (7) zu setzen ist; für $x = 1$ findet man daher die gesuchte independente Darstellung:

$$c_n = (-1)^n \cdot \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k!} \cdot \mathfrak{T}^{k,n}(1), \quad \mathfrak{T}^{k,n}(1) = \sum \frac{s_{r_1} s_{r_2} \cdots s_{r_k}}{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdots r_k}. \tag{10}$$

Aus der Definition (1) folgt aber weiter, daß:

$$\frac{1}{\Gamma(1+x)} = e^{-\gamma(x)}$$

sein muß; somit findet man die (10) ähnliche Formel:

$$\gamma_n = (-1)^n \cdot \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \mathfrak{T}^{k,n}(1), \tag{11}$$

so daß man also den Ausdruck für γ_n aus demjenigen für c_n bilden kann, indem man das Zeichen sämtlicher dort vorkommenden Zahlen s_n wechselt; dies stimmt mit den beiden Formeln § 15, (3), (6) sehr gut überein.

Die independenten Ausdrücke der ersten Koeffizienten c_n sind von Binet[1]), später von Scheibner[2]) angegeben worden; man findet z. B.

$$c_1 = s_1$$
$$c_2 = \frac{1}{2} s_2 + \frac{1}{2} s_1^2$$

1) Journal de l'École Polytechnique, cahier 27, p. 265; 1839.

2) Leipziger Berichte, Bd. 14, p. 75; 1862.

$$c_3 = \frac{1}{3} s_3 + \frac{1}{2} s_2 s_1 + \frac{1}{6} s_1^3$$

$$c_4 = \frac{1}{4} s_4 + \frac{1}{8} s_2^2 + \frac{1}{3} s_3 s_1 + \frac{1}{4} s_2 s_2^2 + \frac{1}{24} s_1^4$$

$$c_5 = \frac{1}{5} s_5 + \frac{1}{6} s_3 s_2 + \frac{1}{4} s_4 s_1 + \frac{1}{8} s_2^2 s_1 + \frac{1}{6} s_3 s_1^2 + \frac{1}{12} s_2 s_1^3 + \frac{1}{120} s_1^5 .$$

§ 17. Über die Funktion $B\left(\frac{x+1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Man kann offenbar mit Zuhilfenahme der Funktion $\beta(x)$ ähnliche Entwicklungen für $B\left(\frac{x+1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ wie die vorhergehenden für $\Gamma(1+x)$ herleiten; setzt man:

$$B\left(\frac{x+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots, \tag{1}$$

so ist diese Reihe offenbar auch für $|x| < 1$ konvergent, und die Identität § 5, (18) liefert, wegen der Formel § 14, (6):

$$\beta(1+x) = \sigma_1 - \sigma_2 x + \sigma_3 x^2 - \sigma_4 x^3 + \sigma_5 x^4 - \cdots,$$

die Ausdrücke:

$$b_0 = \pi, \quad (n+1) b_{n+1} = \sum_{r=0}^{r=n} (-1)^{r+1} \cdot \sigma_{r+1} \cdot b_{n-r}. \tag{2}$$

Die Definition der Betafunktion ergibt weiter:

$$B\left(\frac{x+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{x \cdot B\left(\frac{x}{2}, \frac{1}{2}\right)}; \tag{3}$$

setzt man daher:

$$x \cdot B\left(\frac{x}{2}, \frac{1}{2}\right) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \cdots, \tag{4}$$

so findet man durch Multiplikation mit (1):

$$\beta_0 = 2, \quad 0 = \sum_{r=0}^{r=n} \beta_r \cdot b_{n-r}; \tag{5}$$

die aus (3) hergeleitete Identität:

$$D_x\left[x B\left(\frac{x}{2}, \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{2\pi \cdot \beta(x+1)}{B\left(\frac{x+1}{2}, \frac{1}{2}\right)}$$

führt in ähnlicher Weise zu einer zweiten Rekursionsformel:

$$(n+1)\beta_{n+1} = 2\pi \cdot \sum_{r=0}^{r=n} (-1)^r \sigma_{r+1} \cdot b_{n-r}. \tag{6}$$

Um endlich die independenten Darstellungen der Koeffizienten b_n und β_n zu finden, setzen wir identisch:

$$B\left(\frac{x}{2}, \frac{1}{2}\right) = e^{b(x)},$$

wo:

$$b^{(1)}(x) = D_x \log B\left(\frac{x}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\beta(x)$$

sein muß; dieselbe Methode wie in § 16 ergibt dann die § 16, (10), (11) ähnlichen Ausdrücke:

$$b_n = (-1)^n \pi \cdot \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k!} U^{k,n}(1), \tag{7}$$

$$\beta_n = (-1)^n \cdot 2 \cdot \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot U^{k,n}(1), \tag{8}$$

wo der Kürze halber:

$$U^{k,n}(1) = \sum \frac{\sigma_{r_1} \sigma_{r_2} \cdots \sigma_{r_k}}{r_1 r_2 \cdots r_k} \tag{9}$$

gesetzt worden ist, die *positiven* ganzen Zahlen $r_1, r_2, \cdots, r_k$ aber derselben Bedingung wie in § 16 Genüge leisten müssen.

Für die Koeffizienten b_n und β_n haben wir später in § 55 Integraldarstellungen und Reihenentwicklungen herzuleiten.

§ 18. Über die Zahlenwerte s_n und σ_n.

Es leuchtet ein, daß die independenten Darstellungen, welche wir in den vorhergehenden Paragraphen entwickelt haben, für die dort betrachteten Funktionen gar nichts Spezifisches bieten; denn, bedeutet $F(x)$ eine im Bereiche des Punktes $x = 0$ holomorphe Funktion, so daß $F(0)$ von Null verschieden ist, so existiert eine Entwicklung von der Form:

$$\log F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x + a_3 x^3 + \cdots;$$

sucht man demnach die Koeffizienten der für $F(x)$ erhaltenen Potenzreihe mittels der a_n zu bestimmen, so bekommt man ähnliche Ausdrücke wie diejenigen, welche wir für c_n und γ_n aus den s_n und für b_n und β_n aus den σ_n gebildet haben.

Um die independenten Ausdrücke der obengenannten vier Koeffiziententypen vereinfachen zu können, müssen spezifische Relationen zwischen den Zahlen s_n und σ_n zu Hilfe genommen werden; die Auffindung solcher Relationen ist indessen noch nicht gelungen, und somit sind wir noch nicht imstande, die Koeffizienten der

beständig konvergenten Potenzreihe für die ganze Transzendente $1 : \Gamma(x)$ in einfacher Form anzugeben, obgleich diese ganze Transzendente augenscheinlich eine der einfachsten ist.

Indem wir hier einige Eigenschaften der Zahlen s_n entwickeln, wollen wir zuerst die Reihen s_{2n}, mit geradem Index, unter endlicher Form summieren. Zu dem Ende gehen wir von der aus § 14, (5) fließenden Entwicklung:

$$\pi \cot \pi x = \frac{1}{x} - 2 \cdot \sum_{n=1}^{n=\infty} s_{2n} \cdot x^{2n-1}, \qquad |x| < 1, \tag{1}$$

aus und bezeichnen mit

$$\left\{\begin{aligned} &B_1 = \frac{1}{6}, \; B_2 = \frac{1}{30}, \; B_3 = \frac{1}{42}, \; B_4 = \frac{1}{30}, \; B_5 = \frac{5}{66} \\ &B_6 = \frac{691}{2730}, \; B_7 = \frac{7}{6}, \; B_8 = \frac{3617}{510}, \; B_9 = \frac{43867}{798}, \; B_{10} = \frac{174611}{330}, \ldots \end{aligned}\right. \tag{2}$$

die Bernoullischen Zahlen[1]), die sämtlich rational und positiv sind; als Definition der Zahlen B_r gilt dann:

$$\frac{1}{e^t - 1} = \frac{1}{t} - \frac{1}{2} + \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{(-1)^{r-1} B_r}{(2r)!} \cdot t^{2r-1}, \qquad |t| < 2\pi; \tag{3}$$

nun ist weiter:

$$\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}} = \frac{1}{e^t - 1}, \quad \frac{e^{\frac{t}{2}}}{e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}} = \frac{1}{1 - e^{-t}},$$

und man findet somit aus (3):

$$\frac{e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}}{e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}} = \frac{2}{t} + 2 \cdot \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{(-1)^{r-1} B_r}{(2r)!} \cdot t^{2r-1};$$

die Annahme $t = 2\pi x i$ führt so unmittelbar zu der weiteren Entwicklung:

$$\pi \cot \pi x = \frac{1}{x} - \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{(2\pi)^{2r} B_r}{(2r)!} \cdot x^{2r-1}, \qquad |x| < 1; \tag{4}$$

daraus folgt wegen (1):

$$s_{2n} = \frac{B_n \cdot (2\pi)^{2n}}{(2n)! \, 2}. \tag{5}$$

Über die Natur der Summen s_{2n+1}, mit *ungeradem* Index, wissen wir eigentlich noch gar nichts; es ist bisher noch nicht ge-

1) J. C. Adams hat die ersten 62 Bernoullischen Zahlen berechnet. Journal für Mathematik, Bd. 85; 1878.

lungen, diese Reihen in ähnlicher Weise zu summieren oder durch Summen derselben Gattung, aber mit niedrigerem Index auszudrücken. Bildet man z. B. aus § 15, (4) mittels der Formel:

$$\sin \pi x = \frac{\pi}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}$$

die Potenzreihe für $\pi \sin \pi x$, so fallen in den Koeffizienten dieser Reihe die Summen s_{2n+1} von $n=0$ an sowie ihre Potenzen sämtlich aus.

Wir wollen aber die Zahlen s_n noch von einem anderen Gesichtspunkte aus untersuchen. Zu dem Ende multiplizieren wir nach den gewöhnlichen Regeln die beiden Reihen s_n und s_p und finden:

$$(6) \qquad s_n s_p = s_{n+p} + c_{n,p} + c_{p,n}, \qquad n > 1,\ p > 1,$$

wo:

$$c_{n,p} = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{1}{(r+1)^n}\left(\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{r^p}\right)$$

zu setzen ist, übrigens aber $n > 1$ und $p \geqq 1$ angenommen werden müssen, weil nur so $c_{n,p}$ einen Sinn hat; ebenso findet man:

$$(7) \qquad \sigma_n \sigma_p = s_{n+p} - \delta_{n,p} - \delta_{p,n},$$

$$\delta_{n,p} = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{(-1)^{r+1}}{(r+1)^n}\left(\frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{(-1)^{r-1}}{r^p}\right),$$

wo man also $n \geqq 1$, $p \geqq 1$ nehmen muß, und:

$$(8) \qquad s_n \sigma_p = \sigma_{n+p} + d_{n,p} - \gamma_{p,n}, \qquad n > 1,\ p \geqq 1,$$

$$d_{n,p} = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{1}{(r+1)^n}\left(\frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{(-1)^{r-1}}{r^p}\right),$$

$$\gamma_{n,p} = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{(-1)^{r+1}}{(r+1)^n}\left(\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{r^p}\right);$$

eine Untersuchung der drei betrachteten Produkte verwandelt sich demnach offenbar in eine Untersuchung der vier Zahlen $c_{n,p}$, $\gamma_{n,p}$, $d_{n,p}$ und $\delta_{n,p}$.

Die Formel (6) war schon Euler[1]) bekannt; überhaupt kommen spezielle Reihen $c_{n,p}$, $\gamma_{n,p}$, $d_{n,p}$ und $\delta_{n,p}$ neben anderen, unter denen man auch divergente findet, häufig in dem Briefwechsel zwischen Euler und Goldbach[2]) vor.

---

1) Correspondance math. et physique, Bd. I, p. 191; (1743). Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, Bd. 20, p. 184; (1775) 1776.

2) Correspondance, Bd. I, p. 163—200; 1742—1743.

Nun hat man aber die Dekompositionsformel:

$$
(9)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{x^p(x-a)^q} = (-1)^q \cdot \displaystyle\sum_{r=0}^{r=p-1} \binom{q+r-1}{q-1} \cdot \dfrac{1}{x^{p-r}a^{q+r}} + \\ \qquad + \displaystyle\sum_{r=0}^{r=q-1} \binom{p+r-1}{p-1} \cdot \dfrac{(-1)^r}{a^{p+r}(x-a)^{q-r}}, \end{cases}
$$

wo p und q positive ganze Zahlen bedeuten; setzt man daher in (9) $x = n$ und nacheinander $a = 1, 2, 3, \cdots, n-1$, so ergibt die Addition aller so erhaltenen Gleichungen, indem man sie mit alternierenden Zeichen nimmt, ohne Mühe die beiden Formeln:

$$
(10)\quad \begin{cases} \gamma_{p,q} = \displaystyle\sum_{r=0}^{r=q-1} (-1)^r \cdot \binom{p+r-1}{p-1} \sigma_{p+r} \cdot \sigma_{q-r} + \\ \qquad + (-1)^q \cdot \displaystyle\sum_{r=0}^{r=p-1} \binom{q+r-1}{q-1} \cdot \gamma_{p-r,q+r} \end{cases}
$$

$$
(11)\quad \begin{cases} d_{p,q} = \displaystyle\sum_{r=0}^{r=q-1} (-1)^r \binom{p+r-1}{p-1} s_{p+r} \cdot \sigma_{q-r} + \\ \qquad + (-1)^q \cdot \displaystyle\sum_{r=0}^{r=p-1} \binom{q+r-1}{q-1} \delta_{p-r,q+r}; \end{cases}
$$

es ist also offenbar, daß man in (11) $p > 1$ nehmen muß.

Will man mittels (9) ähnliche Formeln auch für die Reihensummen $c_{p,q}$ und $\delta_{p,q}$ herleiten, so muß man das letzte Glied in den beiden Summen rechter Hand in (9) absondern; man findet dann:

$$
(12)\quad \begin{cases} c_{p,q} = \displaystyle\sum_{r=0}^{r=q-2} (-1)^r \binom{p+r-1}{p-1} s_{q-r} \cdot s_{p+r} + \\ \qquad + (-1)^q \cdot \displaystyle\sum_{r=0}^{r=p-2} \binom{q+r-1}{q-1} c_{p-r,q+r} - \\ \qquad - (-1)^q \binom{p+q-2}{p-1} (s_{p+q} + c_{p+q-1,1}) \end{cases}
$$

$$
(13)\quad \begin{cases} \delta_{p,q} = \displaystyle\sum_{r=0}^{r=q-2} (-1)^r \binom{p+r-1}{p-1} s_{q-r} \cdot \sigma_{p+r} + \\ \qquad + (-1)^q \cdot \displaystyle\sum_{r=0}^{r=p-2} \binom{q+r-1}{q-1} d_{p-r,q+r} + \\ \qquad + (-1)^q \binom{p+q-2}{p-1} (\gamma_{p+q-1,1} - \sigma_{p+q}); \end{cases}
$$

für $q = 1$ muß man in diesen beiden Formeln diejenigen Glieder rechter Hand weglassen, welche sinnlos werden; in (12) muß man immer $p > 1$ annehmen, dagegen gibt (13) für $p = 1$ die speziellere Formel:

$$(14)\quad \gamma_{q,1} - (-1)^q \delta_{1,q} = \sigma_{q+1} - (-1)^q \cdot \sum_{r=0}^{r=q-2} (-1)^r s_{q-r} \cdot \sigma_{r+1}.$$

§ 19. Reduktion einiger Produktsummen der Zahlen s_n und σ_n.

Nach den allgemeinen Erörterungen des § 18 ist es nun sehr leicht, eine Reihe einfacherer Formeln herzuleiten. Zu dem Ende setzen wir zunächst in § 18, (12) $q = 1$ und finden somit für $p > 2$:

$$(1)\qquad c_{p,1} = s_{p+1} - \sum_{r=2}^{r=p-1} c_{p-r+1,r}$$

und für $p = 2$ speziell $c_{2,1} = s_3$, d. h.:

$$(2)\qquad \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{1}{(r+1)^2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{r}\right) = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{1}{r^3};$$

schreibt man aber in (1) die Glieder der Summe rechter Hand in umgekehrter Reihenfolge, so findet man wegen § 18, (6), daß:

$$(3)\qquad \sum_{r=2}^{r=p-1} s_r s_{p-r+1} = p s_{p+1} - 2 c_{p,1}$$

sein muß.

Eine ähnliche Formel kann man auch aus § 18, (12) herleiten, indem man dort $p = 2$ und $q = 2n - 2$ setzt; man erhält dann:

$$(2n-2)(s_{2n} + c_{2n-1,1}) = \sum_{r=0}^{r=2n-4} (-1)^r (r+1) s_{r+2} \cdot s_{2n-r-2}$$

oder, nachdem man die Glieder der Summe rechter Hand in umgekehrter Reihenfolge geordnet hat:

$$2(s_{2n} + c_{2n-1,1}) = \sum_{r=1}^{r=n-1} s_{2r} s_{2n-2r} - \sum_{r=1}^{r=n-2} s_{2r+1} \cdot s_{2n-2r-1};$$

indem man in (3) $p = 2n - 1$ einführt, folgen daraus die beiden Rekursionsformeln:

$$(4)\qquad s_2 s_{2n-2} + s_4 s_{2n-4} + \cdots + s_{2n-2} s_2 = \frac{2n+1}{2} \cdot s_{2n},$$

$$(5)\qquad s_3 s_{2n-3} + s_5 s_{2n-5} + \cdots + s_{2n-3} s_3 = \frac{2n-3}{3} \cdot s_{2n} - 2 c_{2n-1,1},$$

von welchen die erste wohlbekannt ist.

Setzen wir weiter in § 18, (11) $q = 1$, so ergibt sich:

$$d_{p,1} = s_p \sigma_1 - \sum_{r=0}^{r=p-1} \delta_{p-r,r+1}$$

und daraus unter Anwendung von § 18, (7) und § 18, (8) für $q = 1$ die weitere Rekursionsformel:

$$\sum_{r=1}^{r=p} \sigma_r \sigma_{p-r+1} = p s_{p+1} - 2\sigma_{p+1} + 2\gamma_{1,p}. \tag{6}$$

Eine ähnliche Formel kann man aber auch aus § 18, (10) herleiten; die Annahme $p = 1$ und $q = 2n - 1$ ergibt in der Tat, daß:

$$\sum_{r=0}^{r=2n-2} (-1)^r \sigma_{r+1} \sigma_{2n-r-1} = 2\gamma_{1,2n-1}$$

sein muß; somit fließen aus (6) die beiden einfachen Rekursionsformeln:

$$\sigma_2 \sigma_{2n-2} + \sigma_4 \sigma_{2n-4} + \cdots + \sigma_{2n-2} \sigma_2 = \frac{2n-1}{2} \cdot s_{2n} - \sigma_{2n}, \tag{7}$$

$$\sigma_1 \sigma_{2n-1} + \sigma_3 \sigma_{2n-3} + \cdots + \sigma_{2n-1} \sigma_1 = \frac{2n-1}{2} \cdot s_{2n} - \sigma_{2n} + 2\gamma_{1,2n-1}, \tag{8}$$

von welchen die erste ebenfalls wohlbekannt ist.

Um noch ein drittes Formelpaar dieser Art herzuleiten, setzen wir in § 18, (10), (13) $q = 1$; daraus folgt:

$$2\gamma_{p,1} = \sigma_p \sigma_1 - \sum_{r=1}^{r=p-1} \gamma_{p-r,r+1},$$

$$\delta_{p,1} + \gamma_{p,1} = \sigma_{p+1} - \sum_{r=0}^{r=p-2} d_{p-r,r+1};$$

eine Subtraktion dieser Formeln ergibt aber unter Anwendung von § 18, (8) und § 18, (7) für $q = 1$:

$$\gamma_{p,1} + \delta_{1,p} = s_{p+1} - p\sigma_{p+1} + \sum_{r=0}^{r=p-2} s_{p-r} \cdot \sigma_{r+1}; \tag{9}$$

endlich findet man aus § 18, (14) für $q = 2n - 1$ die entsprechende Formel:

$$\gamma_{2n-1,1} + \delta_{1,2n-1} = \sum_{r=0}^{r=2n-3} (-1)^r \sigma_{r+1} \cdot s_{2n-r-1} + \sigma_{2n},$$

daraus ergeben sich aber wegen (9) für $p = 2n - 1$ die beiden gesuchten Rekursionsformeln:

$$\sigma_2 s_{2n-2} + \sigma_4 s_{2n-4} + \cdots + \sigma_{2n-2} s_2 = n\sigma_{2n} - \frac{1}{2} s_{2n}, \tag{10}$$

$$\begin{cases} \sigma_1 s_{2n-1} + \sigma_3 s_{2n-3} + \cdots + \sigma_{2n-3} s_3 = (n-1)\sigma_{2n} - \frac{1}{2} s_{2n} + \\ \qquad + \gamma_{2n-1,1} + \delta_{1,2n-1}. \end{cases} \tag{11}$$

Wir wollen ferner die Reihensumme:

$$t_n = \frac{1}{2}(s_n + \sigma_n) = \frac{1}{1^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \cdots, \qquad n > 1 \tag{12}$$

betrachten; die Formeln (4), (10) und (7) ergeben unmittelbar:

$$t_2 s_{2n-2} + t_4 s_{2n-4} + \cdots + t_{2n-2} s_2 = n t_{2n}, \tag{13}$$

$$t_2 \sigma_{2n-2} + t_4 \sigma_{2n-4} + \cdots + t_{2n-2} \sigma_2 = (n-1) t_{2n}; \tag{14}$$

durch Addition folgt daraus:

$$t_2 t_{2n-2} + t_4 t_{2n-4} + \cdots + t_{2n-2} t_2 = \frac{2n-1}{2} \cdot t_{2n}. \tag{15}$$

Erinnert man sich der beiden aus § 14, (5), (6) hergeleiteten Identitäten:

$$\pi \operatorname{cotg} \pi x = \frac{1}{x} - 2 \cdot \sum_{r=0}^{r=\infty} s_{2r} \cdot x^{2r+1}, \tag{16}$$

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} = \frac{1}{x} + 2 \cdot \sum_{r=0}^{r=\infty} \sigma_{2r} \cdot x^{2r-1}, \tag{17}$$

so erhält man die Formeln (4), (7) und (10), indem man die beiden Reihen (16) und (17) in die Identitäten:

$$D_x(\pi \operatorname{cotg} \pi x) = -\pi^2 - \pi^2 \operatorname{cotg}^2 \pi x,$$

$$D_x(\pi \operatorname{cotg} \pi x) = -\left(\frac{\pi}{\sin \pi x}\right)^2,$$

$$D_x\left(\frac{\pi}{\sin \pi x}\right) = -\frac{\pi}{\sin \pi x} \cdot \pi \operatorname{cotg} \pi x$$

einführt.

§ 20. Anwendungen auf $(\Psi(x) + C)^2$, $\beta^2(x)$ und $\beta(x) \cdot (\Psi(x) + C)$.

Als Anwendung der allgemeinen numerischen Rekursionsformeln, welche wir in § 19 entwickelt haben, wollen wir die Produkte von je zwei der vier Funktionen:

$$\Psi(x) + C, \quad \Psi(1-x) + C, \quad \beta(x), \quad \beta(1-x)$$

entwickeln.

Aus § 14, (5) folgt sogleich:

$$(\Psi(1-x)+C)^2 = \sum_{n=4}^{n=\infty}(s_2 s_{n-2} + s_3 s_{n-3} + \cdots s_{n-2} s_2)x^{n-2},$$

daraus aber wegen § 19, (3):

$$(\Psi(1-x)+C)^2 = \Psi^{(1)}(1-x) - 2\cdot\sum_{n=2}^{n=\infty} c_{n,1}\cdot x^{n-1}.$$

Führen wir nun rechter Hand in dieser Formel statt $c_{n,1}$ die entsprechenden Reihen ein, so findet man als Koeffizient der Summe

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{r-1}$$

den Ausdruck:

$$\frac{x}{r^2}+\frac{x^2}{r^3}+\frac{x^3}{r^4}+\cdots = \frac{x}{r(r-x)} = \frac{1}{r-x}-\frac{1}{r};$$

nachdem man $1-x$ für x gesetzt hat, ergibt sich somit schließlich die Formel:

$$(1)\qquad (\Psi(x)+C)^2 = \Psi^{(1)}(x) - \frac{\pi^2}{6} - 2\xi(x),$$

wo der Kürze halber:

$$(2)\qquad \xi(x) = \sum_{r=1}^{r=\infty}\left(\frac{1}{x+r}-\frac{1}{r+1}\right)\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{r}\right)$$

gesetzt worden ist; die Formel (1) ist für $|1-x|<1$ bewiesen und ist somit für jedes endliche x anwendbar, weil die beiden Seiten in (1) analytische Funktionen in x sind.

Erinnert man sich nun der Identitäten:

$$[\Psi(x)+C-(\Psi(1-x)+C)]^2 = \pi^2\operatorname{cotg}^2\pi x,$$
$$\Psi^{(1)}(x)+\Psi^{(1)}(1-x) = \frac{\pi^2}{\sin^2\pi x},$$

so findet man aus (1) die ähnliche Formel:

$$(3)\qquad (\Psi(x)+C)(\Psi(1-x)+C) = \frac{\pi^2}{3} - \xi(x) - \xi(1-x).$$

Eine dritte Formel dieser Art erhält man durch Multiplikation der beiden Identitäten:

$$2\beta(x) = -\left(\Psi\left(\frac{x}{2}\right)+C\right)+\Psi\left(\frac{x+1}{2}+C\right),$$
$$2\left(\Psi(x)+C\right)-2\log 2 = \left(\Psi\left(\frac{x}{2}\right)+C\right)+\left(\Psi\left(\frac{x+1}{2}\right)+C\right),$$

von denen die letzte ja nur einen Spezialfall der Multiplikationsformel § 6, (1) darstellt; eine Anwendung der Formel (1) ergibt nämlich ohne weiteres:

$$(4) \qquad \beta(x)(\Psi(x) + C) = \beta^{(1)}(x) + \beta(x)\log 2 + \frac{1}{2}\xi\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\xi\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

Aus § 14, (6) erhält man weiter mittels § 19, (6) die Entwicklung:

$$(5) \qquad \beta^2(x) = \Psi^{(1)}(x) - 2\eta(x),$$

wo der Kürze halber:

$$(6) \qquad \eta(x) = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{r}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \cdots + \frac{1}{x+r-1}\right)$$

gesetzt worden ist; daraus folgt unter Anwendung der Identität:

$$\beta(x) + \beta(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

das ähnliche Resultat:

$$(7) \qquad \beta(x)\beta(1-x) = \eta(x) - \eta(1-x).$$

Von den beiden letzten Produkten dieser Art:

$$\beta(x)(\Psi(1-x) + C), \qquad \beta(1-x)(\Psi(x) + C)$$

kann das erste nach § 19, (9) entwickelt werden; man findet wie vorher, daß:

$$(8) \qquad \beta(x)(\Psi(1-x) + C) = -\beta^{(1)}(1-x)\log 2 - \xi_1(x) + \xi_2(1-x)$$

sein muß, wenn:

$$(9) \qquad \xi_1(x) = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{r+x}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{r}\right),$$

$$(10) \qquad \xi_2(x) = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{r+x}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{r-1}}{r}\right)$$

gesetzt werden, und somit schließlich:

$$(11) \qquad \beta(1-x)(\Psi(x) + C) = -\beta^{(1)}(x)\cdot\log 2 - \xi_1(1-x) + \xi_2(x).$$

Wir erwähnen hier noch eine neue Darstellung der Funktion $\Psi(x)$, die wir aus (1) erhalten können. Zu dem Ende bemerken wir, daß eine direkte Quadrierung der Formel:

$$\Psi(x) + C = \sum_{s=1}^{s=\infty}\left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{x+s}\right)$$

unmittelbar folgendes Resultat liefert:

$$(\Psi(x) + C)^2 = \frac{\pi^2}{6} + \Psi^{(1)}(x) - 2\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{(s+1)(x+s)} -$$

$$- 2\xi(x) - 2\sum_{s=1}^{s=\infty}\left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{x+s}\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \cdots + \frac{1}{x+s-1}\right);$$

nun ist aber offenbar:

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{(s+1)(x+s)} = \frac{1}{x-1} \cdot (\Psi(x) + C);$$

also findet man vermöge (1) die neue Darstellung:

$$(12)\quad \begin{cases} \Psi(x) + C = \frac{\pi^2}{6} \cdot (x-1) - \\ - (x-1) \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty}\left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{x+s}\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \cdots + \frac{1}{x+s-1}\right). \end{cases}$$

In diesem Zusammenhange sei noch erwähnt, daß **Bauer**[1]) andere Darstellungen der Funktion $\Psi(x)$ versucht hat, daß aber seine Entwicklungen offenbar divergent sind.

Kapitel IV.

Auswertung unendlicher Reihen und Produkte.

§ 21. Bestimmung einiger Grenzwerte.

Die in § 3, (7) eingeführte Funktion:

$$(1)\qquad \mathfrak{F}_n(x) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n^x}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}$$

spielt in verschiedenen Untersuchungen eine wichtige Rolle; wir wollen hier von ihren Anwendungen wenigstens die wichtigsten erwähnen.

1) *Es sei n eine positive ganze Zahl, während x und y endliche Größen bedeuten, von welchen keine gleich Null oder einer negativen ganzen Zahl angenommen werden darf, dann ist:*

$$(2)\qquad \lim_{n=\infty} \left| \frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{y(x+1)\cdots(y+n)} \right| = \begin{cases} \infty \\ \text{einer endlichen bestimmten Größe,} \\ 0 \end{cases}$$

je nachdem $\Re(x) \gtreqless \Re(y)$ vorausgesetzt wird.

1) Journal für Mathematik, Bd. 57, p. 261; 1860.

Man hat nämlich wegen (1):

$$x(x+1)\cdots(x+n) = \frac{n!(n+1)^x}{\mathfrak{F}_{n+1}(x)} \tag{3}$$

und somit auch:

$$\frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{y(y+1)\cdots(y+n)} = \frac{\mathfrak{F}_{n+1}(y)}{\mathfrak{F}_{n+1}(x)}\cdot(n+1)^{x-y}, \tag{4}$$

woraus der Grenzwert unmittelbar folgt.

2) *Für den allgemeinen Binomialkoeffizienten:*

$$\binom{x-1}{n} = (-1)^n\cdot\frac{(1-x)(2-x)\cdots(n-x)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}$$

hat Cauchy[1]) *den Ausdruck:*

$$\binom{x-1}{n} = \frac{(-1)^n\cdot n^{-x}}{\mathfrak{F}_n(1-x)} \tag{5}$$

angegeben.

3) *Es bedeuten p und q zwei positive ganze Zahlen, während die $2p+2q$ Veränderlichen a_s, a_s', b_s und b_s' der Bedingung:*

$$\begin{cases} (a_1+a_2+\cdots+a_p)+(a_1'+a_2'+\cdots+a_q') = \\ = (b_1+b_2+\cdots+b_p)+(b_1'+b_2'+\cdots+b_q') \end{cases} \tag{6}$$

Genüge leisten, sonst aber ganz willkürlich angenommen werden dürfen, so jedoch, daß keine von ihnen gleich Null oder einer negativen ganzen Zahl wird; dann hat man den Grenzwert:

$$\lim_{n=\infty}\prod_{s=1}^{s=p}\frac{\Gamma(a_s+n)}{\Gamma(b_s+n)}\cdot\prod_{s=1}^{s=q}\frac{\Gamma(a_s'-n)}{\Gamma(b_s'-n)} = \prod_{r=1}^{r=q}\frac{\sin(\pi b_r')}{\sin(\pi a_r')}, \tag{7}$$

wo n als positive ganze Zahl anzusehen ist.

Man hat nämlich:

$$\Gamma(x+n) = x(x+1)\cdots(x+n-1)\cdot\Gamma(x),$$

$$\Gamma(x+n) = \frac{\Gamma(x)}{\mathfrak{F}_n(x)}\cdot(n-1)!\,n^x; \tag{8}$$

weiter findet man:

$$\Gamma(x-n) = \frac{(-1)^n\,\Gamma(x)}{(1-x)(2-x)\cdots(n-x)},$$

daraus aber in ähnlicher Weise:

$$\Gamma(x-n) = \frac{(-1)^n\,\Gamma(x)\,\mathfrak{F}_n(1-x)}{(n-1)!\,n^{1-x}}. \tag{9}$$

Bezeichnet nun, für einen endlichen Wert von n, P_n das Produkt linker Hand in (7), so hat man vermöge (8) und (9):

$$P_n = \prod_{s=1}^{s=p}\frac{\Gamma(a_s)}{\Gamma(b_s)}\cdot\frac{\mathfrak{F}_n(b_s)}{\mathfrak{F}_n(a_s)}\cdot\prod_{s=1}^{s=q}\frac{\Gamma(a_s')}{\Gamma(b_s')}\cdot\frac{\mathfrak{F}_n(1-a_s')}{\mathfrak{F}_n(1-b_s')};$$

1) Exercices de Math. Iᵉ année, p. 10; 1826.

läßt man aber in dieser Formel n über jede Grenze hinauswachsen, so findet man unmittelbar die Formel (7).

In dem speziellen Falle $q=0$ findet man die einfachere Formel:

$$\lim_{n=\infty} \prod_{s=1}^{s=p} \frac{\Gamma(a_s+n)}{\Gamma(b_s+n)} = 1, \tag{10}$$

vorausgesetzt, daß:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_p = b_1 + b_2 + \cdots + b_p$$

angenommen wird.

§ 22. Die hypergeometrische Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$.

Setzt man mit Gauß[1]):

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = 1 + \frac{\alpha}{1} \cdot \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} + \cdots, \tag{1}$$

und bezeichnet u_n das $(n+1)^{\text{te}}$ Glied rechter Hand in (1), so ist wegen § 21, (4):

$$u_n = \frac{\mathfrak{F}_n(\gamma)}{\mathfrak{F}_n(\alpha)\mathfrak{F}_n(\beta)} \cdot n^{\alpha+\beta-\gamma-1};$$

somit ist die unendliche Reihe rechter Hand in (1) offenbar *unbedingt konvergent*, falls nur:

$$\Re(\gamma - \alpha - \beta) > 0 \tag{2}$$

angenommen wird; denn wenn wenigstens eine der Zahlen α oder β Null oder negativ ganz ist, reduziert sich die Reihe F auf eine endliche.

Nachdem wir die unbedingte Konvergenz unserer Reihe F nachgewiesen haben, wollen wir nunmehr ihre Summe suchen. Zunächst finden wir nach einer einfachen Rechnung die beiden Formeln:

$$F(\alpha+1, \beta, \gamma, 1) - F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\beta}{\gamma} \cdot F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, 1), \tag{3}$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma+1, 1) - F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = -\frac{\alpha\beta}{\gamma(\gamma+1)} \cdot F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, 1), \tag{4}$$

von denen die erste offenbar durch Vertauschung von α und β eine ganz analoge liefert; denn $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$ ist ja eine in den beiden Elementen α und β symmetrische Funktion.

Wenden wir weiter auf das $(n+1)^{\text{te}}$ Glied der Reihe:

$$\beta F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, 1)$$

---

1) Comment. Gotting. Bd. 2, p. 1; 1812. Werke Bd. III, p. 126. Deutsche Ausgabe, p. 1.

die offenbare Identität:

$$\beta + n = (\gamma + n) + (\beta - \gamma)$$

an, so ergibt sich die Formel:

$$\beta F(\alpha, \beta + 1, \gamma + 1, 1) = \gamma F(\alpha, \beta, \gamma, 1) - (\gamma - \beta) F(\alpha, \beta, \gamma + 1, 1), \tag{5}$$

aus welcher man offenbar durch Vertauschung von α und β eine ähnliche herleiten kann.

Setzt man aber nun in (5) $\alpha + 1$ für α, so kann man mittels (3) die Funktion $F(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1, 1)$ eliminieren, und wir gelangen so zu der Formel:

$$\gamma F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = (\gamma - \beta) F(\alpha + 1, \beta, \gamma + 1, 1); \tag{6}$$

setzt man in (3) ebenso $\gamma + 1$ für γ und eliminiert mittels (4) die Funktion $F(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 2, 1)$, so ergibt sich:

$$\alpha F(\alpha + 1, \beta, \gamma + 1) + (\gamma - \alpha) F(\alpha, \beta, \gamma + 1, 1) = \gamma F(\alpha, \beta, \gamma, 1); \tag{7}$$

somit führt (6) endlich zu der Rekursionsformel:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)} \cdot F(\alpha, \beta, \gamma + 1, 1), \tag{8}$$

die aber vorläufig nur für:

$$\Re(\gamma - \alpha - \beta) > 1$$

bewiesen ist. Bemerkt man indessen, daß die beiden Seiten von (8) offenbar in γ analytische Funktionen sind, wenn nur die Bedingung (2) befriedigt wird, so leuchtet ein, daß auch (8) unter dieser Bedingung gültig ist.

Bedeutet nun n eine positive ganze Zahl, so findet man aus (8), indem man dort statt γ der Reihe nach $\gamma + 1, \gamma + 2, \cdots, \gamma + n - 1$ einführt, folgende allgemeine Rekursionsformel:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\mathfrak{F}_n(\gamma)\mathfrak{F}_n(\gamma - \alpha - \beta)}{\mathfrak{F}_n(\gamma - \alpha)\mathfrak{F}_n(\gamma - \beta)} \cdot F(\alpha, \beta, \gamma + n, 1); \tag{9}$$

da nun offenbar:

$$\lim_{n = \infty} F(\alpha, \beta, \gamma + n, 1) = 1$$

ist, so findet man aus (9) die gesuchte Formel:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)}, \tag{10}$$

die von Gauß[1]) herrührt.

Eben die Formeln (9) und (10) sind es, welche Gauß auf seine Definition der Gammafunktion als Grenzwert von $\mathfrak{F}_n$ geführt haben.

---

1) Comment. Gotting., Bd. 2, p. 28; 1812. Werke, Bd. III, p. 147. Deutsche Ausgabe, p. 35.

§ 23. Verallgemeinerung der Goldbachschen Reihe.

Es bedeute p eine endliche positive ganze Zahl, und es sei $r = p$ oder $r = p + 1$. Wir suchen jetzt den Wert der Doppelsumme:

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{1}{(ps+r)^n - 1} \tag{1}$$

Zu dem Ende gehen wir von der Indentität:

$$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} + \cdots \tag{2}$$

aus, wo $|n| > 1$ vorausgesetzt werden muß, und führen in sie statt n jede Zahl von der Form:

$$ps + r \tag{3}$$

ein, indem wir jedoch die Zahlen:

$$(pq + r)^n, \quad n \geqq 2 \tag{4}$$

ausschließen, die ja nach unserer Voraussetzung über r *sämtlich* derselben Differenzenreihe wie (3) selbst angehören müssen; durch die Addition aller so erhaltenen Gleichungen bekommen wir rechter Hand eine Doppelreihe, deren Glieder sämtlich positiv sind, und deren einzelne Horizontal- und Vertikalreihen sämtlich konvergieren; die Glieder unserer Doppelreihe können daher willkürlich geordnet werden, so daß es erlaubt ist, die Vertikalreihen zuerst zu summieren, woraus sich die Identität:

$$\sum_{s=0}^{s=\infty}{}' \frac{1}{(ps+r)(ps+r-1)} = \sum_{n=2}^{n=\infty} \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{1}{(ps+r)^n} \tag{5}$$

ergibt, in welcher der Akzent nach dem Summenzeichen linker Hand bedeutet, daß in dieser Summe die Glieder, welche die Zahlen (4) enthalten, auszuschließen sind.

Aus (5) findet man aber leicht:

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{1}{(ps+r)(ps+r-1)} - \sum_{n=2}^{n=\infty} \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{1}{(ps+r)^n((ps+r)^n - 1)} \\ = \sum_{n=2}^{n=\infty} \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{1}{(ps+r)^n}. \end{aligned} \right. \tag{6}$$

Da nun offenbar:

$$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \tag{7}$$

ist, so fließt aus (6) die einfachere Formel:

$$(8)\qquad \sum_{n=2}^{n=\infty}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{1}{(ps+r)^n-1}=\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{1}{(ps+r)(ps+r-1)},$$

welche in noch eleganterer Form dargestellt werden kann; beachtet man nämlich die aus (7) folgende Identität:

$$\frac{1}{(ps+r)(ps+r-1)}=\frac{1}{p}\left(\frac{1}{\frac{r-1}{p}+s}-\frac{1}{\frac{r}{p}+s}\right),$$

so ergibt sich schließlich die merkwürdige Formel:

$$(9)\qquad \sum_{n=2}^{n=\infty}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{1}{(ps+r)^n-1}=\frac{1}{p}\left(\Psi\left(\frac{r}{p}\right)-\Psi\left(\frac{r-1}{p}\right)\right),$$

in der also $r=p$ oder $r=p+1$ zu setzen ist.

Setzt man speziell in (9) $r=2$, $p=1$, so findet man die von Goldbach[1]) angegebene Formel:

$$(10)\qquad \sum_{n=2}^{n=\infty}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{1}{(s+2)^n-1}=1,$$

während die Annahme $r=p=2$ folgende Formel von Euler[1]) liefert:

$$(11)\qquad \sum_{n=2}^{n=\infty}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{1}{(2s+2)^n-1}=\log 2.$$

Wir bemerken noch, daß Catalan[2]) ähnliche Reihen untersucht hat, ohne jedoch die Formeln von Euler und Goldbach direkt zu verallgemeinern.

§ 24. Durch $\Psi(x)$ summierbare unendliche Reihen.

Die Funktion $\Psi(x)$ und ihre nach x genommenen Ableitungen erlauben uns, wie Appell[3]) beiläufig bemerkt hat, Reihen von sehr allgemeiner Form zu summieren; von diesen Reihen wollen wir zuerst einen spezielleren Fall betrachten. Es seien nämlich:

$$\varrho_1,\ \varrho_2,\ \varrho_3,\ \cdots,\ \varrho_n$$

n endliche und verschiedene Größen, während:

$$(1)\qquad H(x)=(x-\varrho_1)(x-\varrho_2)\cdots(x-\varrho_n)$$

1) Moritz Cantor, Vorlesungen über die Geschichte der Math., Bd. III, pp. 644, 645; 1898.

2) Journal de Mathématiques, Bd. 7, p. 1—12; 1842.

3) Comptes rendus, Bd. 86, p. 953; 1878.

sein mag; dann ist bekanntlich:

$$\frac{1}{H(x)} = \sum_{s=1}^{s=n} \frac{1}{H^{(1)}(\varrho_s)} \cdot \frac{1}{x-\varrho_s}; \tag{2}$$

multipliziert man aber die beiden Seiten in (2) mit x, so ergibt die Annahme $x=\infty$, daß:

$$\sum_{s=1}^{s=n} \frac{1}{H^{(1)}(\varrho_s)} = 0 \tag{3}$$

sein muß, daraus folgt wegen (2):

$$\frac{1}{H(x+r)} = -\sum_{s=1}^{s=n} \frac{1}{H^{(1)}(\varrho_s)} \left[\frac{1}{r+1} - \frac{1}{x-\varrho_s+r}\right],$$

und somit liefert uns die Definition von $\Psi(x)$ die Formel:

$$\sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{1}{H(x+r)} = -\sum_{s=1}^{s=n} \frac{\Psi(x-\varrho_s)}{H^{(1)}(\varrho_s)}; \tag{4}$$

denn die Gleichung (3) zeigt deutlich, daß die Eulersche Konstante rechter Hand in (4) wegfallen muß.

Beachtet man aber die Identität:

$$\frac{1}{x-\varrho_s+pq+r} = \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{\frac{x-\varrho_s+r}{q}+p},$$

so findet man in ähnlicher Weise die noch allgemeinere Formel:

$$\sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{1}{H(x+pq+r)} = \frac{1}{q} \cdot \sum_{s=1}^{s=n} \frac{1}{H^{(1)}(\varrho_s)} \cdot \Psi\left(\frac{x-\varrho_s+r}{q}\right), \tag{5}$$

wo q eine endliche positive ganze Zahl bedeutet, r aber eine der Zahlen

$$0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ q-1$$

ist.

Setzt man speziell:

$$\varrho_s = -s+1, \tag{6}$$

so zeigt die Identität:

$$\Psi(x+m) = \Psi(x) + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \cdots + \frac{1}{x+m-1},$$

daß die Funktion $\Psi(x)$ rechter Hand in (4) wegfallen muß; die Summe der betreffenden Reihe wird demnach eine in x rationale

Funktion. Die so erhaltene elementare Formel werden wir später in § 30, (8) noch auf andere Weise herleiten.

Setzt man in (5) in ähnlicher Weise $r = 0$, $q = 2$, so ergibt sich eine Formel, welche wir in § 31, (4) durch andere Methoden herleiten wollen.

Es ist offenbar, daß dieselbe Methode, wie Jensen[1]) bemerkt hat, auch auf die rationale Funktion:

$$R(x) = \frac{b_0 x^{n-2} + b_1 x^{n-3} + \cdots + b_{n-2}}{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}$$

anwendbar ist, falls nur der Grad des Nenners denjenigen des Zählers um mindestens zwei Einheiten übersteigt. Ist nämlich:

$$R(x) = \sum_{m=1}^{m=p} \frac{\alpha_m}{(x-\varrho_m)^{r_m}} + \sum_{s=1}^{s=q} \frac{\beta_s}{x-\varrho_s}, \tag{7}$$

wo die r_m ganze Zahlen bedeuten, die sämtlich größer als 1 sind, so findet man ähnlich wie vorher:

$$\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_q = 0; \tag{8}$$

daraus ergibt sich folgende Verallgemeinerung von (5):

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{k=\infty} R(x+kh+l) = -\frac{1}{k} \cdot \sum\limits_{s=1}^{s=q} \beta_s \cdot \Psi\left(\frac{x-\varrho_s+l}{k}\right) + \\ \qquad + \sum\limits_{m=1}^{m=p} \frac{(-1)^{r_m} \cdot \alpha_m}{(r_m-1)!\, k^{r_m}} \cdot \Psi^{(r_m-1)}\left(\frac{x-\varrho_m+l}{k}\right), \end{cases} \tag{9}$$

wo k eine positive ganze Zahl bedeutet, während l eine der Zahlen

$$0,\ 1,\ 2,\ 3 \cdots,\ k-1$$

ist.

Setzt man dagegen:

$$R(x) = \frac{b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \cdots + b_{n-1}}{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}, \tag{10}$$

so daß der Grad des Nenners denjenigen des Zählers genau um eine Einheit übersteigt, so findet man zwar eine Auflösung von derselben Form wie (7), die Gleichung (8) ist aber nicht mehr richtig; die entsprechende Reihe von derselben Form wie (9) wird daher divergent. Dagegen findet man eine (9) ziemlich ähnliche Entwicklung für $R(x) - R(y)$, nämlich:

1) Nyt Tidsskrift for Mathematik, Bd. 2 B, p. 48; 1891.

$$
(11)\left\{\begin{aligned}
&\sum_{h=0}^{h=\infty}(R(x+kh+l)-R(y+kh+l))\\
&=\frac{1}{k}\cdot\sum_{s=1}^{s=q}\beta_s\left[\Psi\left(\frac{y-\varrho_s+l}{k}\right)-\Psi\left(\frac{x-\varrho_s+l}{k}\right)\right]\\
&+\sum_{m=1}^{m=p}\frac{(-1)^{r_m}\cdot\alpha_m}{(r_m-1)!\,k^{r_m}}\left[\Psi^{(r_m-1)}\left(\frac{x-\varrho_m+l}{k}\right)-\Psi^{(r_m-1)}\left(\frac{y-\varrho_m+l}{k}\right)\right].
\end{aligned}\right.
$$

Wir überlassen es dem Leser, die Untersuchung der Funktion:

$$
(12)\qquad C(x)=-\sum_{s=0}^{s=\infty}(\operatorname{cotg} a(x+s)+i)
$$

und ihrer Anwendung auf die Summation von Reihen, deren n^{tes} Glied eine rationale Funktion von $\sin(2an)$ und $\cos(2an)$ ist, selbst durchzuführen; die Analogie dieser Aufgabe mit derjenigen, welche wir gelöst haben, ist von Appell[1]) bemerkt worden.

§ 25. Durch $\Gamma(x)$ und $\Psi(x)$ ausdrückbare unendliche Produkte.

Die Produktdarstellung § 4, (1) für $\Gamma(x)$, nämlich:

$$
(1)\qquad \Gamma(x)=\frac{e^{-Cx}}{x}\cdot\prod_{s=1}^{s=\infty}\frac{e^{\frac{x}{s}}}{1+\frac{x}{s}},
$$

gestattet uns unmittelbar, gewisse unendliche Produkte mittels Gammafunktionen unter endlicher Form auszudrücken. Man findet z. B. aus (1):

$$
(2)\qquad \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\gamma)\,\Gamma(\beta-\gamma)}=\prod_{s=0}^{s=\infty}\left[\left(1+\frac{\gamma}{\alpha+s}\right)\left(1-\frac{\gamma}{\beta+s}\right)\right]
$$

und daraus vermöge § 22, (10) die Produktdarstellung der hypergeometrischen Reihe, wenn das vierte Element gleich 1 genommen wird:

$$
(3)\qquad F(\alpha,\beta,\gamma,1)=\prod_{s=0}^{s=\infty}\left[\left(1-\frac{\alpha}{\gamma+s}\right)\left(1+\frac{\alpha}{\gamma-\alpha-\beta+s}\right)\right];
$$

die Unsymmetrie in α und β rechter Hand ist in (3) sichtlich nur scheinbar.

---

1) Comptes rendus, Bd. 86, p. 956; 1878.

Aus (2) findet man, wenn α und β reelle Größen bedeuten, speziell:

$$(4)\qquad \frac{\Gamma(\alpha)^2}{|\Gamma(\alpha+i\beta)|^2} = \prod_{s=0}^{s=\infty}\left(1+\frac{\beta^2}{(\alpha+s)^2}\right),$$

eine Formel, die man ebenso wie (2) Mellin[1]) verdankt.

Mit Mellin setzen wir noch allgemeiner:

$$\mathfrak{P}(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

und bezeichnen durch:

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \cdots,\ \alpha_n$$

die Wurzeln der algebraischen Gleichung n^{ten} Grades:

$$x^n\left[1+\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)\right] = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

Da nun wegen (1):

$$\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-\alpha_r y)} = e^{-C\alpha_r y}\cdot\prod_{s=0}^{s=\infty}\left(1-\frac{\alpha_r y}{x+s}\right)e^{\frac{\alpha_r y}{s}}$$

ist, so ergeben die Identitäten:

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n = -a_1,$$

$$1+\mathfrak{P}\left(\frac{y}{x}\right) = \left(1-\alpha_1\cdot\frac{y}{x}\right)\left(1-\alpha_2\cdot\frac{y}{x}\right)\cdots\left(1-\alpha_n\cdot\frac{y}{x}\right)$$

folgende allgemeine Formel von Mellin[2]):

$$(5)\qquad \prod_{r=1}^{r=n}\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-\alpha_r y)} = e^{Ca_1 y}\cdot\prod_{s=0}^{s=\infty}\left(1+\mathfrak{P}\left(\frac{y}{x+s}\right)\right)e^{-\frac{a_1 y}{s}}.$$

Setzt man speziell:

$$\mathfrak{P}(x) = -x^n,$$

und bezeichnen:

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \cdots,\ \varepsilon_n$$

die n^{ten} Einheitswurzeln, so findet man aus (5), wenn man $x=1$ setzt und hinwiederum x statt y einführt, die von Liouville[3]) angedeutete Formel:

$$(6)\qquad \prod_{r=1}^{r=n}\frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon_r x)} = \prod_{s=1}^{s=\infty}\left(1-\left(\frac{x}{s}\right)^n\right)$$

---

1) Acta Mathematica, Bd. 15, p. 324; 1891.

2) Acta Mathematica, Bd. 8, p. 322—324; 1883. Öfversigter der Helsingforser Akademie, Bd. 26, p. 173; 1884.

3) Comptes rendus, Bd. 35, p. 321; 1852. Journal de Mathématiques, Bd. 17, p. 453; 1852.

Die andere spezielle Annahme:

$$\mathfrak{P}(x) = x^n$$

ergibt in ähnlicher Weise die Formel:

$$\prod_{r=1}^{r=n} \frac{1}{\Gamma(1-\delta_r x)} = \prod_{s=1}^{s=\infty} \left(1 + \left(\frac{x}{s}\right)^n\right), \tag{7}$$

wo

$$\delta_1, \delta_2, \delta_3, \cdots, \delta_n$$

die Wurzeln der Gleichung

$$x^n = -1$$

bezeichnen; aus (6) und (7) findet man aber durch Division die neue Formel:

$$\prod_{r=1}^{r=n} \frac{\Gamma(1-\delta_r x)}{\Gamma(1-\varepsilon_r x)} = \prod_{s=1}^{s=\infty} \frac{s^n - x^n}{s^n + x^n} \tag{8}$$

und daraus nach einer einfachen Reduktion:

$$\frac{\Gamma(1-\delta_n x)}{\Gamma(2-x)} \cdot \prod_{r=1}^{r=n-1} \frac{\Gamma(1-\delta_r x)}{\Gamma(1-\varepsilon_r x)} = \frac{1 + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1}}{1 + x^n} \cdot \prod_{s=2}^{s=\infty} \frac{s^n - x^n}{s^n + x^n},$$

wo also $\varepsilon_n = 1$ zu setzen ist. Aus der Annahme $x = 1$ folgt somit die numerische Formel:

$$\Gamma(1-\delta_n) \cdot \prod_{r=1}^{r=n-1} \frac{\Gamma(1-\delta_r)}{\Gamma(1-\varepsilon_r)} = \frac{n}{2} \cdot \prod_{s=2}^{s=\infty} \frac{s^n - 1}{s^n + 1}. \tag{9}$$

Der Spezialfall von (9), welcher $n = 3$ entspricht, ist besonders interessant; setzt man nämlich:

$$\delta_3 = -1, \quad \left.\begin{matrix}\delta_2\\ \delta_1\end{matrix}\right\} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \quad \left.\begin{matrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\end{matrix}\right\} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2},$$

so wird das Produkt linker Hand in (9) offenbar gleich:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3-i\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1-i\sqrt{3}}{2}} = 1;$$

daraus ergibt sich das interessante Resultat:

$$\prod_{s=2}^{s=\infty} \frac{s^3 - 1}{s^3 + 1} = \frac{2}{3}, \tag{10}$$

welches man Gram[1]) verdankt.

1) Nyt Tidsskrift for Mathematik, Bd. 10 B, p. 96; 1899.

Wir wollen nun noch ein Produkt von etwas anderem Charakter als die vorhergehenden betrachten und leiten zuerst aus der Definition der Funktion $\Psi(x)$ folgende Produktdarstellung her:

$$e^{y\cdot\Psi(x)} = e^{-Cy-\frac{y}{x}}\cdot\prod_{s=1}^{s=\infty} e^{-\frac{y}{x+s}+\frac{y}{s}};$$

die Formel:

$$\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+y)} = e^{Cy}\cdot\left(1+\frac{y}{x}\right)\cdot\prod_{s=1}^{s=\infty}\left(1+\frac{y}{x+s}\right)\cdot e^{-\frac{y}{s}}$$

liefert dann unmittelbar folgende Formel von Mellin[1]):

$$e^{y\cdot\Psi(x)}\cdot\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+y)} = \prod_{s=0}^{s=\infty}\left(1+\frac{y}{x+s}\right)\cdot e^{-\frac{y}{x+s}}; \tag{11}$$

daraus folgt dann noch die speziellere Formel:

$$e^{\Psi(x)} = x\cdot\prod_{s=0}^{s=\infty}\left(1+\frac{1}{x+s}\right)\cdot e^{-\frac{1}{x+s}}, \tag{12}$$

die man ebenfalls Mellin[1]) verdankt.

Es ist offenbar, daß die allgemeine Mellinsche Formel (5) uns das Analogon zu der allgemeinen Formel § 24, (9) darbietet.

Appell[2]) hat bemerkt, daß die Funktion:

$$D(x) = e^{a\int_1^x C(x)\,dx}, \tag{13}$$

wo $C(x)$ die in § 24, (12) definierte Funktion bedeutet, so daß also $D(x)$ in demselben Verhältnis zu $C(x)$ steht wie $\Gamma(x)$ zu $\Psi(x)$, in ähnlicher Weise die Ermittelung derjenigen unendlichen Produkte erlaubt, deren allgemeiner Faktor eine rationale Funktion von $\sin(2an)$ und $\cos(2an)$ ist.

1) Öfversigter der Stockholmer Akademie 1883, Nr. 5, p. 6; Öfversigter der Helsingforser Akademie, Bd. 26, p. 175; 1884.

2) Comptes rendus, Bd. 86, p. 956; 1878.

Kapitel V.

Fakultäten und Fakultätenkoeffizienten.

§ 26. Die Stirlingschen Zahlen erster und zweiter Art.

Das endliche Produkt:

$$a(a+d)(a+2d)\cdots(a+(n-1)d), \qquad n \text{ positiv und ganz,}$$

welches man eine *analytische Fakultät* genannt hat, spielte eine recht wichtige Rolle in der mathematischen Literatur der ersten Hälfte des vorigen Jahrhunderts; man hat dafür auch ein eigenes Zeichen eingeführt, nämlich:

$$a^{n|d} = a(a+d)(a+2d)\cdots(a+(n-1)d). \tag{1}$$

Die ersten Schriftsteller, welche sich mit diesen Fakultäten beschäftigt haben, sind Stirling[1]), Vandermonde[2]) und Kramp[3]); die beiden ersten betrachteten jedoch nur den Fall $d=1$, während Kramp das Zeichen linker Hand in (1) eingeführt hat.

Gauß[4]) drückt die Fakultät $a^{n|d}$ mittels Gammafunktionen aus; er findet nämlich aus (1):

$$a^{n|d} = \frac{a}{d}\left(\frac{a}{d}+1\right)\left(\frac{a}{d}+2\right)\cdots\left(\frac{a}{d}+n-1\right)\cdot d^n,$$

so daß die Fundamentaleigenschaft der Gammafunktion unmittelbar die Formel:

$$a^{n|d} = \frac{d^n \cdot \Gamma\left(\frac{a}{d}+n\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{d}\right)} \tag{2}$$

liefert; aus ihr folgt durch Einführung der Funktion $\mathfrak{F}_n(x)$:

$$a^{n|d} = \frac{d^n \cdot (n-1)!\, n^{\frac{a}{d}}}{\mathfrak{F}_n\left(\frac{a}{d}\right)}. \tag{3}$$

Gauß[4]) polemisiert daher auch gegen die augenscheinliche Allgemeinheit der Fakultät $a^{n|d}$, indem er folgendermaßen schreibt:

---

1) Methodus differentialis; London 1730.

2) Mémoires de l'Acad. Royale des Sciences 1772, p. 489—498.

3) Analyse des réfractions astronomiques et terrestres; Leipzig 1799.

4) Comment. Gott., Bd. 2, p. 27; 1812. Werke Bd. III, p. 146. Deutsche Ausgabe, p. 34.

„Es erscheint indessen ratsamer, eine Funktion einer Veränderlichen in die Analysis einzuführen als eine Funktion dreier Veränderlichen, um so mehr, als diese sich auf jene zurückführen läßt.“

Nichtsdestoweniger ist in der nächsten Zeit nach der Publikation der Gaußschen Abhandlung sozusagen eine ganze Literatur über die analytischen Fakultäten emporgewachsen; wir erwähnen hier nur die Arbeiten von Bessel[1]), Crelle[2]), Müller[3]), Oettinger[4]), Ohm[5]) und Raabe[6]).

Die Formeln (2) und (3) zeigen, daß das Genie eines Gauß mit der Fakultät als selbständigem Funktionenbegriff fertig war; indessen mußte noch das Genie eines Weierstraß[7]) hinzukommen, um die Rätsel des eben genannten Begriffes durchdringen und daraus die vollständige Definition der Funktion $1:\Gamma(x)$ herleiten zu können, obgleich dies ja in der Tat von Gauß geschehen war mit der Einführung der Funktion $\mathfrak{F}_n(x)$ und deren Grenzwert für $n=\infty$, d. h. der Gammafunktion selbst.

Mit der klassischen Arbeit von Weierstraß ist es mit der Fakultät als selbständigem Funktionenbegriffe aus, und das Zeichen $a^{n|d}$ ist nachher schnell und gewiß für immer verschwunden, so daß die moderne Bedeutung der Fakultäten wohl auf diejenige von Entwicklungsfunktionen zur Bildung der sogenannten Fakultätenreihen beschränkt sein dürfte.

Den vorhergehenden Bemerkungen gemäß betrachten wir nur den Fall $d=1$ und setzen identisch für die Fakultät vom Range n und mit dem Argumente x:

$$(4) \qquad x(x+1)\cdots(x+n-1) = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + \cdots + C_n^{n-1} x;$$

die positiven ganzen Zahlen C_n^p werden dann die *Fakultätenkoeffizienten vom Range n* oder auch die *Stirlingschen Zahlen erster Art* genannt; denn Stirling[8]) hat zum ersten Male ihre Bedeutung erkannt und eine Tafel der ersten dieser Zahlen berechnet.

---

1) Abhandlungen, Bd. II, p. 342—352.

2) Journal für Mathematik, Bd. 7, pp. 253—305, 314—380; 1831.

3) Ebenda, Bd. 11, p. 361—372; 1834.

4) Ebenda, Bd. 33, 35, 38, 44.

5) Ebenda, Bd. 39.

6) Ebenda, Bd. 43, p. 283—292; 1852; Bd. 48, p. 130—136; 1854.

7) Journal für Mathematik, Bd. 51, p. 1—60; 1856. Abhandlungen aus der Funktionenlehre, p. 183—260. Werke Bd. I, p. 153—221.

8) Methodus differentialis, p. 11; London 1730.

Die Definition (4) ergibt unmittelbar den Satz:

Der Fakultätenkoeffizient C_n^p ist, für $p > 0$, die Summe der $\binom{n-1}{p}$ möglichen Produkte mit p verschiedenen Faktoren, welche man aus den Zahlen

$$0, 1, 2, 3, \cdots, n-1$$

wählen kann, während immer:

$$C_n^0 = 1 \tag{5}$$

zu setzen ist.

Multipliziert man nun die beiden Seiten von (4) mit $x + n$, so ergibt sich die Rekursionsformel:

$$C_{n+1}^p = C_n^p + n \cdot C_n^{p-1}, \tag{6}$$

während die Annahme $x = 1$ die numerische Gleichheit:

$$n! = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^{n-1} \tag{7}$$

liefert, aus der hinwiederum die wichtige Ungleichheit folgt:

$$n! > C_n^p, \quad 0 \leqq p \leqq n-1. \tag{8}$$

Den reziproken Wert des Produktes linker Hand in (4) nennen wir die Fakultät vom Range $-n$ mit dem Argumente x; benutzen wir die elementaren Identitäten:

$$\frac{(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^s \binom{n-1}{s}}{x+s},$$

$$\frac{1}{x+r} = \frac{1}{x} - \frac{r}{x^2} + \frac{r^2}{x^3} - \cdots, \quad |x| > r,$$

so erhalten wir offenbar eine Entwicklung von der Form:

$$\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \mathfrak{C}_n^s}{x^{n+s}}, \quad |x| > n-1, \tag{9}$$

wo der Kürze halber

$$\mathfrak{C}_n^r = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \sum_{s=0}^{s=n-2} (-1)^s \binom{n-1}{s} \cdot (n-s-1)^{n+r-1}, \quad r \geqq 0, \tag{10}$$

$$\mathfrak{C}_n^0 = 1 \tag{11}$$

gesetzt worden ist.

Die durch die Formeln (10) und (11) definierten positiven ganzen Zahlen $\mathfrak{C}_n^r$ nennen wir die *Fakultätenkoeffizienten vom Range* $-n$ oder auch die *Stirlingschen Zahlen zweiter Art;* denn Stirling[1])

1) Methodus differentialis, p. 8; London 1730.

hat auch die Bedeutung dieser Zahlen zum ersten Male klar erkannt und eine Tafel derselben berechnet.

Setzt man in (9) $n+1$ für n und multipliziert man die so erhaltene Formel mit $x+n$, so erhalten wir die zu (6) analoge Rekursionsformel:

$$(12) \qquad \mathfrak{C}_n^p = \mathfrak{C}_{n+1}^p - n \cdot \mathfrak{C}_{n+1}^{p-1}.$$

§ 27. Anwendung der Stirlingschen Zahlen.

Die Stirlingschen Zahlen beider Arten sind durch eine überaus große Menge von Relationen miteinander verbunden[1]); wir können indessen hier nicht näher auf alle diese Formeln eingehen, müssen uns vielmehr auf einige einfachere Anwendungen dieser Zahlen beschränken. Zunächst gehen wir von den wohlbekannten Differentialformeln[2]):

$$(1) \qquad D_x^n f(\log x) = \frac{1}{x^n} \cdot \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s C_n^s \cdot f^{(n-s)}(t)_{t=\log x},$$

$$(2) \qquad D_x^n \varphi(e^x) = \sum_{s=0}^{s=n-1} e^{(n-s)x} \mathfrak{C}_{n-s+1}^s \cdot \varphi^{(n-s)}(t)_{t=e^x}$$

aus, von welchen die eine als die umgekehrte der anderen anzusehen ist.

Die Annahme:

$$f(\log x) = \varphi(x), \qquad f(x) = \varphi(e^x)$$

ergibt nämlich:

$$D_x^n f(\log x) = \varphi^{(n)}(x), \qquad D_x^n \varphi(e^x) = f^{(n)}(x);$$

setzt man daher:

$$\varphi^{(r)}(1) = a_r, \qquad f^{(r)}(1) = b_r,$$

so findet man aus (1) für $x=1$ und aus (2) für $x=0$ unmittelbar die beiden Formeln

$$(3) \qquad a_n = \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s C_n^s \cdot b_{n-s},$$

$$(4) \qquad b_n = \sum_{s=0}^{s=n-1} \mathfrak{C}_{n-s+1}^s \cdot a_{n-s},$$

---

1) Man vergleiche meine Abhandlung: Recherches sur les polynomes et les nombres de Stirling, Annali di Matematica, Bd. 9, p. 287—318; 1904.

2) Schlömilch, Kompendium, Bd. II, pp. 10, 13; 1879.

wo also $n \geqq 1$ anzunehmen ist; dagegen findet man natürlich speziell:

(5) $$a_0 = b_0.$$

Bestimmt man also für $n = 1, 2, 3, \cdots, r$ *aus* (3) *die Zahlen* $b_1, b_2, \cdots, b_r$, *so findet man genau die Ausdrücke* (4) *und umgekehrt.*

Als eine erste Anwendung dieses Umkehrungsprinzipes wollen wir die Gleichungen § 26, (4) für $n = 1, 2, 3, \cdots, r$ nach den Potenzen von x auflösen; dadurch findet man unmittelbar die schon von Stirling[1]) herrührende Formel:

(6) $$x^n = \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s \mathfrak{C}_{n-s+1}^s \cdot x(x-1)\cdots(x-s).$$

Da die entsprechende Umkehrung der Formel § 26, (9), d. h. die Entwicklung von x^{-n} nach Fakultäten negativen Ranges eine besondere Konvergenzbedingung erfordert, können wir diese Umkehrung erst in § 30 mitteilen.

Wir bemerken, daß die Formeln (1) und (2) unmittelbar die beiden Potenzreihenentwicklungen:

(7) $$\frac{(-1)^n}{n!} \cdot (\log(1-x))^n = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{C_{n+s}^s}{(n+s)!} \cdot x^{n+s},$$

(8) $$\frac{1}{n!} \cdot (1-e^{-x})^n = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \mathfrak{C}_{n+1}^s}{(n+s)!} \cdot x^{n+s}$$

liefern, von welchen die erste für $|x| \leqq 1$ anwendbar ist, während die letztere eine beständig konvergierende Potenzreihe ist.

Wir wollen noch ein paar andere Anwendungen der Zahlen $\mathfrak{C}_{n+1}^r$ kurz erwähnen:

1) *Bezeichnet man durch* $\mathfrak{K}_{n,p}$ *die Summe derjenigen Polynomialkoeffizienten:*

$$\frac{n!}{r_1! r_2! r_3! \cdots r_p!}, \quad r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_p = n,$$

in welchen keine einzige der p Zahlen $r_1, r_2, \cdots, r_p$ *gleich Null ist, so hat man allgemein:*

(9) $$\mathfrak{K}_{n,p} = p! \mathfrak{C}_{p+1}^{n-p}.$$

Erstens findet man nämlich

$$\mathfrak{K}_{n,2} = 2^n - 2 = 2 \cdot \mathfrak{C}_3^{n-2};$$

---

1) Methodus differentialis, p. 8; London 1730.

zweitens ist allgemein:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_p)^n = \sum_{s=0}^{s=n} \binom{n}{s} a_1^s (a_2 + a_3 + \cdots + a_p)^{n-s},$$

woraus die Rekursionsformel:

$$\mathfrak{L}_{n,p} = \sum_{s=1}^{s=n-1} \binom{n}{s} \cdot \mathfrak{L}_{n-s,\,p-1},$$

folgt, und die vollständige Induktion ergibt dann die gesuchte Formel (9).

2) *Für die höhere Differenz einer einzigen Potenz von x findet man den Ausdruck*:

$$(10) \qquad \Delta^n x^p = n! \sum_{r=n}^{r=p} \binom{r}{n} \cdot \mathfrak{C}_{n+1}^{r-n} \cdot x^{p-r}, \qquad p \geq n.$$

Es ist nämlich:

$$\Delta^n x^p = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{n}{s} \cdot (x + n - s)^p.$$

§ 28. Die Stirlingschen Polynome.

Die reiche Literatur über die Zahlen C_n^p und $\mathfrak{C}_n^p$ bietet mehrere allgemeine independente Darstellungen dieser Zahlen dar.

Cauchy[1]) hat z. B. statt e^{-x} die entsprechende Potenzreihe in § 27, (8) eingeführt; eine Anwendung der Polynomialformel gibt dann ohne Mühe eine independente, aber praktisch unbrauchbare Darstellung der Zahlen $\mathfrak{C}_n^p$; es ist offenbar, daß eine ähnliche Methode uns auch die independente Darstellung der Zahl C_n^p liefert.

Schläfli[2]) hat auf andere Weise eine solche independente Darstellung der C_n^p gefunden — but this law is a very complicated one — sagt Cayley[3]) und mit Recht; denn Schläfli drückt die Zahlen C_n^p durch vielfache Summen aus. Indessen sagen die Formeln von Cayley nichts über die analytische Natur von C_n^p, dasselbe gilt für die Determinantenausdrücke, welche von Zeipel[4]) gegeben hat. Wir bemerken endlich, daß Schlömilch[5]) die Zahlen C_n^p mittels der $\mathfrak{C}_r^s$ ausgedrückt hat.

---

1) Exercices de Mathématiques, IIIe année, p. 147—154; 1828.

2) Journal für Mathematik, Bd. 43, p. 1—22; 1852.

3) Quarterly Journal, Bd. 3, p. 308; 1860.

4) Jahrbuch der Universität Lund (schwedisch) 1870.

5) Journal für Mathematik, Bd. 44, p. 344—355; 1852. Kompendium, Bd. II, p. 28; 1879.

Während also die Frage nach einer allgemeingültigen independenten, aber praktisch brauchbaren Darstellung der **Stirlingschen** Zahlen noch eine offene ist, kann man ohne große Schwierigkeit über die analytische Natur der Zahlen C_n^p und $\mathfrak{C}_n^p$ interessante Auskünfte erhalten, indem man die beiden Potenzreihen § 27, (7) und (8) verallgemeinert.

Zu dem Zwecke bezeichnen wir mit x eine endliche, von -1 verschiedene reelle oder komplexe Zahl, dann findet man offenbar eine Potenzreihenentwicklung von der Form:

$$(1)\qquad \left(\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}\right)^{-x-1} = 1 + (x+1)\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\psi_s(x)\cdot\alpha^{s+1},\quad |\alpha|<2\pi,$$

in welcher $\psi_n(x)$ ein ganzes Polynom n^{ten} Grades in x mit rationalen Koeffizienten sein muß.

Diese Definition der Funktionen $\psi_n(x)$ liefert für sie unmittelbar eine Funktionalgleichung; multipliziert man nämlich in (1) mit α^{-x-1}, so ergibt die Differentiation nach α die Differenzengleichung:

$$(2)\qquad (x+2)\psi_n(x+1) = (x-n)\psi_n(x) + (x+1)\psi_{n-1}(x);$$

außerdem findet man direkt den Anfangswert:

$$(3)\qquad \psi_0(x) = \frac{1}{2}.$$

Nach diesen Erörterungen wollen wir nunmehr den Satz beweisen:

Die Polynome $\psi_n(x)$, welche wir als Stirlingsche Polynome bezeichnen wollen, sind durch die Gleichungen (2) *und* (3) *eindeutig definiert.*

Zu diesem Zwecke setzen wir zuerst in (2) $n=1$; es ist dann offenbar, daß $\psi_1(x)$ weder eine Konstante sein darf, noch eine höhere Potenz von x als die erste enthalten kann; man findet daher:

$$\psi_1(x) = \frac{1}{4!}(3x+2);$$

es sei nun für $r = 0, 1, 2, \cdots, n-1$:

$$(4)\qquad \psi_r(x) = \sigma_{r,0}x^r + \sigma_{r,1}x^{r-1} + \cdots + \sigma_{r,r-1}x + \sigma_{r,r};$$

setzt man demnach:

$$\psi_n(x) = a_0x^p + a_1x^{p-1} + \cdots + a_{p-1}x + a_p,$$

so ist die Annahme $p<n$ offenbar unmöglich; setzt man aber andererseits $p>n$ voraus, so ergibt eine einfache Rechnung:

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_{p-n-1} = 0,$$

und somit muß $\psi_n(x)$ ein Polynom genau n^{ten} Grades in x sein. Wendet man daher die Bezeichnung (4) auch für $r = n$ an, so liefert (2) die Rekursionsformeln:

$$(2n + 2)\sigma_{n,0} = \sigma_{n-1,0}, \tag{5}$$

$$\left\{\begin{aligned} &(2n - p + 2)\sigma_{n,p} = \sigma_{n-1,p-1} + \sigma_{n-1,p} - \\ &-\sum_{s=0}^{s=n-1}\left[\binom{n-s}{p-s+1} + 2\binom{n-s}{p-s}\right]\sigma_{n,s}, \end{aligned}\right. \tag{6}$$

indem man in (6) für $p = n$ den Koeffizient $\sigma_{n-1,n} = 0$ zu setzen hat.

Die Formel (1) erlaubt uns noch einige numerische Resultate herzuleiten; setzt man z. B. $x = -2$, so wird:

$$\psi_n(-2) = \frac{(-1)^n}{(n+2)!}, \tag{7}$$

während die Annahme $x = 0$ wegen § 18, (3) das weitere Resultat:

$$\psi_{2n}(0) = 0, \quad \psi_{2n+1}(0) = \frac{(-1)^n}{(2n+2)!} \cdot B_{n+1} \tag{8}$$

ergibt, wo die B_r die Bernoullischen Zahlen bedeuten; aus (2) findet man weiter für $x = -1$:

$$\psi_n(0) = -(n+1)\psi_n(-1)$$

und daraus wegen (8):

$$\psi_{2n}(-1) = 0, \quad \psi_{2n+1}(-1) = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!(2n+2)} \cdot B_{n+1}; \tag{9}$$

aus (8) und (9) findet man aber den Satz:

Das Stirlingsche Polynom mit geradem Index, $\psi_{2n}(x)$, ist für $n > 0$ immer durch $x(x+1)$ teilbar.

Setzt man in (2) $x + n$ statt n, so erhält man die Formel:

$$(x+n+2)\psi_n(x+n+1) - (x+n+1)\psi_{n-1}(x+n) = x\psi_n(x+n); \tag{10}$$

indem man statt n nacheinander $n-1, n-2, n-3, \cdots, 2, 1$ einführt, und die aus (3) hervorgehende Identität:

$$(x+2)\psi_0(x) = 1 + x \cdot \psi_0(x)$$

anwendet, folgt aus (10) die Summenformel:

$$(x + n + 2)\psi_n(x + n + 1) = 1 + x \cdot \sum_{s=0}^{s=n} \psi_s(x + s), \tag{11}$$

aus welcher man mehrere numerische Resultate herleiten kann; setzt man z. B. $x = 0$, so wird:

$$\psi_n(n+1) = \frac{1}{n+2} \tag{12}$$

und somit für $x = 1$:

$$(13) \qquad \psi_n(n+2) = \frac{1}{n+3}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+2}\right).$$

Als Verallgemeinerung der Formel § 27, (7) findet man die Potenzreihenentwicklung:

$$(14) \qquad \left(\frac{\log(1-\alpha)}{-\alpha}\right)^x = 1 + x \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \psi_s(x+s) \cdot \alpha^{s+1}, \qquad |\alpha| < 1;$$

denn es leuchtet ein, daß die Koeffizienten in dieser Reihenentwicklung in x ganze Polynome sein müssen, und multipliziert man mit α^x, so ergibt die Differentiation nach α eben die Formel (10), während schließlich $\psi_0(x) = \frac{1}{2}$ wird.

Die allgemeinen Reihen (1) und (14) sind wohl zuerst von Ubbo Meyer[1]) untersucht worden. Meyer hat auch die Abhängigkeit der Koeffizienten dieser Reihen erkannt[2]), ohne jedoch die Funktionen $\psi_n(x)$ einzuführen.

Die Formeln (11) und (14) in Verbindung miteinander sind sehr interessant; setzt man in der Tat $\Re(x) > 0$ voraus, so muß die Potenzreihe rechter Hand in (14) offenbar für $\alpha = 1$ divergieren; es leuchtet somit ein, daß der absolute Wert des Produktes linker Hand in (11) mit n über jede Grenze hinauswachsen muß. Schröder[3]) hat den Grenzwert von $\psi_n(n-1)$ für $n = \infty$ bestimmt.

Vergleichen wir endlich die beiden Formeln (1) und (14) mit § 27, (7) und (8), so finden wir folgenden Satz:

Bedeuten n und r positive Zahlen, so lassen sich die Stirlingschen Zahlen erster und zweiter Art mittels der Stirlingschen Polynome folgendermaßen darstellen:

$$(15) \qquad C_{n+1}^r = \frac{(n+1)!}{(n-r)!} \cdot \psi_{r-1}(n), \qquad n \geq r, \qquad r > 0,$$

$$(16) \qquad \mathfrak{C}_{n+1}^r = \frac{(-1)^{r+1}(n+r)!}{(n-1)!}\, \psi_{r-1}(-n-1), \qquad r > 0.$$

Da die Formeln (15) und (16) die independente Darstellung der *Stirlingschen* Zahlen auf die Bestimmung der Funktionen $\psi_n(x)$ zurückführen, scheinen sie mir die Bezeichnung *Stirlingsche Polynome* zu rechtfertigen.

---

1) Grunert Archiv, Bd. 9, p. 101—112; 1847.
2) loc. cit. p. 110.
3) Zeitschrift für Math. und Physik, Bd. 20, p. 115; 1880

Setzt man in (1) $x = n - 1$, wo n eine positive ganze Zahl bedeutet, so findet man vermöge (15) eine spezielle Formel, welche Sylvester[1]) hergeleitet hat.

§ 29. Sukzessive Berechnung der Polynome $\psi_n(x)$.

Die Herleitung einer für die praktische Rechnung bequemen independenten Darstellung der *Stirlingschen* Polynome scheint überaus große Schwierigkeiten darzubieten; indessen kann man leicht Rekursionsformeln aufstellen, welche für eine sukzessive Berechnung dieser Funktionen recht bequem sind.

Zu diesem Zwecke setzen wir in § 28, (1) y statt x; die Multiplikation der beiden so erhaltenen Gleichungen ergibt dann ohne Mühe für $\psi_n(x)$ die Additionsformel:

$$(1)\quad \begin{cases} (x+y+2)\psi_n(x+y+1) = (x+1)\psi_n(x) + (y+1)\psi_n(y) + \\ \qquad + (x+1)(y+1)\cdot \sum_{s=0}^{s=n-1} \psi_s(x)\psi_{n-s-1}(y); \end{cases}$$

hier ist aber doch zu bemerken, daß der Charakter dieser Additionsformel ein sehr allgemeiner ist; denn sie ist in der Tat für die Koeffizienten der für $(F(\alpha))^{-x-1}$ erhaltenen Potenzreihen anwendbar, falls sich sowohl $F(\alpha)$ wie $1 : F(\alpha)$ beide im Bereiche des Punktes $\alpha = 0$ regulär verhalten.

Setzt man aber in (1) $y = 0$, und eliminiert man aus der so erhaltenen Formel mittels § 28, (2) die Funktion $\psi_n(x+1)$, so findet man wegen § 28, (8) die ziemlich einfache Rekursionsformel:

$$(2)\quad \begin{cases} (n+1)\psi_n(x) = \frac{x+1}{2}\cdot \psi_{n-1}(x) - \psi_n(0) + \\ \qquad + (x+1)\cdot \sum_{s=1}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s B_s}{(2s)!}\cdot \psi_{n-2s}(x), \end{cases}$$

aus welcher der im vorigen Paragraph bewiesene Satz über die Teilbarkeit von $\psi_{2n}(x)$ durch $x(x+1)$ deutlich hervorgeht.

Setzt man noch in (1) $y = -2$ und $-x$ statt x, so findet man vermöge § 28, (7) folgende nicht so bequeme Rekursionsformel:

$$(3)\quad \begin{cases} x\cdot \psi_n(-x-1) = (x-1)\psi_n(-x) + \\ + (x-1)\cdot \sum_{s=1}^{s=n-1} \frac{(-1)^s}{(s+1)!}\cdot \psi_{n-s-1}(-x) + \frac{(-1)^n}{(n+2)!}, \end{cases}$$

1) Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, Bd. 15, p. 195; 1883.

die Annahme $y = x$ aber liefert die elegante Formel:

$$\psi_n(2x+1) = \psi_n(x) + \frac{x+1}{2} \cdot \sum_{s=0}^{s=n-1} \psi_s(x)\psi_{n-s-1}(x) \cdot \tag{4}$$

Andere Relationen zwischen dem Polynome $\psi_n(x)$ und ähnlichen Funktionen, sowie den Grenzwert von $\psi_n(x)$ für $n = \infty$ habe ich selbst in mehreren Arbeiten[1]) entwickelt.

Die in § 18, (2) mitgeteilten Werte der ersten *Bernoullischen* Zahlen ergeben unter Anwendung von (2) für die ersten *Stirlingschen* Polynome folgende Ausdrücke:

$$\psi_0(x) = \frac{1}{2}$$

$$\psi_1(x) = \frac{1}{4!}(3x+2)$$

$$\psi_2(x) = \frac{x(x+1)}{4!\,2}$$

$$\psi_3(x) = \frac{1}{6!\,2^3}(15x^3 + 15x^2 - 10x - 8)$$

$$\psi_4(x) = \frac{x(x+1)}{6!\,2^4}(3x^2 - x - 6)$$

$$\psi_5(x) = \frac{1}{9!\,2^5}(63x^5 - 315x^3 - 224x^2 + 140x + 96)$$

$$\psi_6(x) = \frac{x(x+1)}{9!\,2^4}(9x^4 - 18x^3 - 57x^2 + 34x + 80),$$

und somit können wir auch die ersten *Stirlingschen* Zahlen C^r_{n+1} und $\mathfrak{C}^r_{n+1}$ für einen willkürlichen Wert von n direkt berechnen.

Wir bemerken noch, daß die *Stirlingschen* Polynome uns erlauben, auf einfache Weise die Koeffizienten gewisser Potenzreihen auszudrücken. Differentiiert man z. B. die Formel § 28, (14) nach x, und setzt man nachher $x = 0$, so erhält man die Entwicklung:

$$-\log\left(\frac{-x}{(\log(1-x)}\right) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \psi_s(s)x^{s+1}, \qquad |x| < 1. \tag{5}$$

Versucht man dagegen die Koeffizienten dieser Reihe durch

1) Annali di Matematica, (3) Bd. 9, p. 319—326; 1904, (3) Bd. 12; 1905. Monatshefte für Math. und Physik, Bd. 16, p. 135—140; 1905.

altbekannte Zahlen auszudrücken, so ergibt (2) für $x = n$ und unter Anwendung von § 28, (15) den Ausdruck:

$$(6) \quad \psi_n(n) = \frac{1}{2n+2} = \frac{\psi_n(0)}{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} \cdot \sum_{s=1}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s B_s}{2s} \cdot C_{n+1}^{n-2s+1}.$$

In den Paragraphen 102, 114 werden wir noch andere schöne Anwendungen der Stirlingschen Polynome auseinandersetzen.

Cayley[1]) hat die Reihenentwicklung (5) und die analogen betrachtet, welche man aus § 28, (14) erhält, indem man r-mal nach x differentiiert und dann $x = 0$ setzt; das allgemeine Bildungsgesetz der Koeffizienten dieser Reihenentwicklungen ist ihm indessen verborgen geblieben.

§ 30. Die Stirlingsche Fakultätenreihe für $1:(x-\alpha)$.

Es bleibt uns noch übrig, die Formel § 26, (9) umzukehren und eine negative Potenz von x nach Fakultäten negativen Ranges zu entwickeln. Zu dem Ende setzen wir in der Identität:

$$\frac{1}{x-\alpha} \cdot \left(\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+r-1)}{x(x+1)\cdots(x+r-1)} - \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+r)}{x(x+1)\cdots(x+r)} \right) = $$
$$= \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+r-1)}{x(x+1)\cdots(x+r)}$$

nacheinander $r = 1, 2, 3, \cdots, n$; die Addition aller so erhaltenen Gleichungen ergibt dann vermöge der Identität:

$$\frac{1}{x-\alpha}\left(1 - \frac{\alpha}{x}\right) = \frac{1}{x}$$

die Formel:

$$(1) \qquad \frac{1}{x-\alpha} = \frac{1}{x} + \sum_{s=1}^{s=n} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+s-1)}{x(x+1)\cdots(x+s)} + R_n(x,\alpha),$$

wo der Kürze halber:

$$(2) \qquad R_n(x,\alpha) = \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)}{x(x+1)\cdots(x+n)} \cdot \frac{1}{x-\alpha}$$

gesetzt worden ist.

Nach diesen Erörterungen liefert der Grenzwert § 21, (2) folgenden Spezialfall der Gaußschen Formel § 22, (10):

$$(3) \quad \frac{1}{x-\alpha} = \frac{1}{x} + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+s-1)}{x(x+1)\cdots(x+s)}, \ \Re(x-\alpha) > 0,$$

welcher Stirling[2]) angehört.

1) Quarterly Journal, Bd. 3, p. 366—369; 1860.
2) Methodus differentialis, p. 12, 45; London 1730.

Differentiiert man nun die Formel (1) $(p-1)$-mal nach α, so ergibt die Annahme $\alpha = 0$ die von Schlömilch[1]) herrührende Identität:

$$\frac{1}{x^p} = \sum_{s=p-1}^{s=n} \frac{C_s^{s-p+1}}{x(x+1)\cdots(x+s)} + R_n(x), \tag{4}$$

wo der Kürze halber:

$$R_n(x) = \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)} \cdot \left(\frac{C_{n+1}^n}{x^{p-1}} + \frac{C_{n+1}^{n-1}}{x^{p-2}} + \cdots + \frac{C_{n+1}^{n-p+2}}{x}\right) \tag{5}$$

gesetzt worden ist; aus der Ungleichheit § 26, (8) findet man nun weiter:

$$|R_n(x)| < \frac{K\cdot(p-1)\cdot n!}{|x(x+1)\cdots(x+n)|},$$

wo K eine endliche Zahl bedeutet, und somit ergibt sich wegen § 21, (2) aus (4) für $n = \infty$ die in § 27 erwähnte Entwicklung:

$$\frac{1}{x^p} = \sum_{s=p-1}^{s=\infty} \frac{C_s^{s-p+1}}{x(x+1)\cdots(x+s)}, \qquad \Re(x) > 0, \tag{6}$$

welche ebenfalls Stirling[2]) angehört.

Wir haben aus (1) noch eine andere elementare Formel herzuleiten, indem wir $x = \alpha + r$ einführen, wo r eine positive ganze Zahl bedeutet; eine darauf folgende Division durch

$$\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+r-1)$$

ergibt dann, indem x schließlich statt α gesetzt wird, unmittelbar die gesuchte Formel:

$$\sum_{s=0}^{s=n} \frac{1}{(x+s)(x+s+1)\cdots(x+s+r)} = \tag{7}$$
$$= \frac{1}{r}\left(\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+r-1)} - \frac{1}{(x+n+1)\cdots(x+n+r)}\right).$$

Läßt man noch in (7) n über jede Grenze hinauswachsen, so findet man die in § 24 als Spezialfall der dort entwickelten Formel (4) erwähnte Identität:

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{1}{(x+s)(x+s+1)\cdots(x+s+r)} = \tag{8}$$
$$= \frac{1}{r}\cdot\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+r-1)},$$

welche für einen willkürlichen Wert von x anwendbar ist; auch sie war Stirling[3]) schon bekannt.

---

1) Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 4, p. 396; 1859.
2) loc. cit. p. 11. 3) loc. cit. p. 23—24.

Kapitel VI.

Fakultätenreihen für $\beta(x)$, $\mu(x)$ und $\nu(x)$.

§ 31. Die Stirlingsche Fakultätenreihe für $\beta(x)$.

Die Formeln des vorhergehenden Paragraphen erlauben uns, in sehr einfacher Weise die bekannten Fakultätenreihenentwicklungen aus der Theorie der Gammafunktion in aller Strenge herzuleiten. Wir beginnen mit einer neuen und einfacheren Summation des in § 24 erwähnten Spezialfalles der dortigen Formel (5).

Zu diesem Zwecke setzen wir:

$$S_r(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{1}{(x+s)(x+s+1)\cdots(x+s+r-1)}, \tag{1}$$

$$T_r(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{1}{(x+2s)(x+2s+1)\cdots(x+2s+r-1)}, \tag{2}$$

wo r eine ganze Zahl bedeutet, die größer als 1 ist; dann ist vermöge § 30, (8):

$$S_r(x) = \frac{1}{r-1}\cdot\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+r-2)}, \tag{3}$$

und außerdem ergibt eine einfache Rechnung, daß:

$$T_r(x) + T_r(x+1) = S_r(x),$$
$$T_r(x) - T_r(x+1) = r\cdot T_{r+1}(x)$$

sein muß, woraus wegen (3) die Rekursionsformel:

$$T_r(x) = \frac{1}{2r-2}\cdot\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+r-2)} + \frac{r}{2}\cdot T_{r+1}(x)$$

folgt; somit haben wir folgende Formelkette:

$$T_r(x) = \frac{1}{2r-2}\cdot\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+r-2)} + \frac{r}{2}\cdot T_{r+1}(x)$$

$$T_{r-1}(x) = \frac{1}{2r-4}\cdot\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+r-3)} + \frac{r-1}{2}\cdot T_r(x)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$T_3(x) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x(x+1)} + \frac{3}{2}\cdot T_4(x)$$

$$T_2(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} + \frac{2}{2}\cdot T_3(x);$$

multipliziert man nun diese Formeln einzeln mit:

$$\frac{(r-1)!}{2^{r-2}},\ \frac{(r-2)!}{2^{r-3}},\ \ldots,\ \frac{2!}{2^1},\ \frac{1!}{2^0},$$

so ergibt die Addition aller so erhaltenen Gleichungen wegen der Identität:

$$T_2(x) = \beta(x)$$

die allgemeine Summenformel:

$$(4) \qquad \beta(x) = \sum_{s=0}^{s=r-2} \frac{s!}{x(x+1)\cdots(x+s)} \cdot \frac{1}{2^{s+1}} + \frac{r!}{2^{r-1}} \cdot T_{r+1}(x),$$

aus der deutlich hervorgeht, daß die Summe $T_r(x)$, für $r > 2$, von einer rationalen Funktion in x abgesehen, mittels $\beta(x)$ ausgedrückt werden kann.

Aus (4) kann man aber eine noch elegantere Formel herleiten, wenn man r über jede Grenze hinauswachsen läßt; setzt man:

$$x = x_1 + ix_2,$$

wo x_1 und x_2 reelle Größen bedeuten, so ist es in der Tat möglich, wenn x als endlich vorausgesetzt wird, eine solche positive ganze Zahl p zu bestimmen, daß entweder

$$x_1 \geqq p \text{ oder } -p+1 \leqq x_1 < -p+2 \text{ ist.}$$

Im ersten Falle hat man aber offenbar:

$$\frac{1}{|x+s|} \leqq \frac{1}{s+x_1} \leqq \frac{1}{s+p};$$

daraus folgt wegen (2) und (3):

$$(5) \qquad |T_{r+1}(x)| < S_{r+1}(p) = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{p(p+1)\cdots(p+r-1)}.$$

Im zweiten Falle findet man ähnlich, wenn $s > p$ vorausgesetzt wird, daß:

$$\frac{1}{|x+s|} < \frac{1}{s-p}$$

sein muß, woraus die neue Ungleichung:

$$\frac{1}{|(x+s)(x+s+1)\cdots(x+s+r)|} < \frac{K_s}{s(s+1)\cdots(s+r-p)}$$

folgt, wo der Kürze halber:

$$K_s = \frac{1}{|(x+s)(x+s+1)\cdots(x+s+p|}$$

gesetzt worden ist.

Nun ist es offenbar erlaubt, in (4) die Zahl r größer als p anzunehmen; bezeichnet dann K den größten Wert von $K_0, K_2, K_4, \cdots$, so ist K sicher endlich, weil p endlich bleibt, und man findet:

$$(6) \qquad |T_{r+1}(x)| < K \cdot S_{r-p}(1) = \frac{K}{r-p-1} \cdot \frac{1}{(r-p-1)!}.$$

Aus (5) und (6) findet man aber nun unmittelbar, falls x weder Null noch negativ und ganz ist, den Grenzwert:

$$\lim_{r=\infty}\left|\frac{r!}{2^{r-1}}\cdot T_{r+1}(x)\right| = 0;$$

somit ist auch:

$$(7)\qquad \beta(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{s!}{x(x+1)\cdots(x+s)}\cdot\frac{1}{2^{s+1}},$$

eine Formel, die schon Stirling[1]) bekannt war; später ist (7) von Th. Claussen[2]) wiedergefunden worden.

Setzt man in (7) $x=\frac{1}{2}$, so gewinnt man das numerische Resultat:

$$(8)\qquad \frac{\pi}{2} = 1 + \sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2s}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2s+1)}\cdot\frac{1}{2^s},$$

während die Differentiation nach x die weitere Formel:

$$(9)\qquad -\beta^{(1)}(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{s!}{x(x+1)\cdots(x+s)}\cdot\frac{1}{2^{s+1}}\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\cdots+\frac{1}{x+s}\right)$$

liefert; setzt man aber in § 28, (14) $x=2$, $\alpha=\frac{1}{2}$, so folgt wegen § 28, (13), wenn man in (9) $x=1$ setzt, die von Legendre[3]) herrührende Formel:

$$(10)\qquad \sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{2^s} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}(\log 2)^2;$$

für $x=\frac{1}{2}$ findet man endlich aus (9) das andere numerische Resultat:

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned}&\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s}{(2s+1)^2} = \frac{1}{2}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{s!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2s+1)}\cdot\\ &\qquad\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2s+1}\right).\end{aligned}\right.$$

Es ist bemerkenswert, daß sich das Restglied der Fakultätenreihe (7) mittels (4) so einfach ausdrücken läßt; für $r>2$ findet man dadurch die weitere Fakultätenreihenentwicklung:

$$(12)\qquad T_r(x) = \frac{1}{(r-1)!}\cdot\sum_{s=r-2}^{s=\infty}\frac{s!}{x(x+1)\cdots(x+s)}\cdot\frac{1}{2^{s-r+3}}$$

welche überall anwendbar ist, wo dies mit (7) der Fall ist.

1) Methodus differentialis, p. 47; London 1730.

2) Grunert Archiv, Bd. 13, p. 336; 1849.

3) Exercices de calcul intégral, Bd. I, p. 244; 1811.

§ 32. Gleichmäßige Konvergenz gewisser Reihen. Entwicklungen von $(\Psi(x-\alpha) - \Psi(x))$ und $\beta(2x)$.

Wir kehren nunmehr zur Stirlingschen Formel § 30, (1) zurück und setzen dort nacheinander $x+1,\ x+2, \cdots, x+p$ für x; die Addition aller so erhaltenen Gleichungen gibt dann wegen § 30, (7):

$$(1)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{r=0}^{r=p}\left(\frac{1}{x-\alpha+r} - \frac{1}{x+r}\right) = \\ \displaystyle = \sum_{s=1}^{s=n} \frac{1}{s} \cdot \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+s-1)}{x(x+1)\cdots(x+s-1)} + R_{n,p}(x,\alpha), \end{cases}$$

wo der Kürze halber:

$$(2)\quad \begin{cases} \displaystyle R_{n,p}(x,\alpha) = \sum_{r=0}^{r=p} R_n(x+r,\alpha) + \\ \displaystyle + \sum_{s=1}^{s=n} \frac{1}{s} \cdot \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+s-1)}{(x+p)(x+p+1)\cdots(x+p+s-1)} \end{cases}$$

gesetzt worden ist.

Nun ist aber offenbar wegen § 30, (2):

$$R_n(x+r,\alpha) = \frac{x-\alpha}{x-\alpha+r} \cdot \frac{x(x+1)\cdots(x+r-1)}{(x+n+1)\cdots(x+n+r)} \cdot R_n(x,\alpha),$$

woraus unmittelbar:

$$(3)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{r=0}^{r=p} R_n(x+r,\alpha) = \\ \displaystyle = R_n(x,\alpha)\left(1 + \sum_{r=1}^{r=p} \frac{x-\alpha}{x-\alpha+r} \cdot \frac{x(x+1)\cdots(x+r-1)}{(x+n+1)\cdots(x+n+r)}\right) \end{cases}$$

folgt; was endlich die letzte Summe rechter Hand in (2) betrifft, so ist:

$$(4)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{s=1}^{s=n} \frac{1}{s} \cdot \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+s-1)}{(x+p)(x+p+1)\cdots(x+p+s-1)} = \\ \displaystyle = \frac{\alpha}{x+p}\left(1 + \sum_{s=2}^{s=n} \frac{1}{s} \cdot \frac{(\alpha+1)\cdots(\alpha+s-1)}{(x+p+1)\cdots(x+p+s-1)}\right). \end{cases}$$

Denkt man sich nun in (3) und (4) die positiven ganzen Zahlen n und p hinreichend groß, so werden die Reihen rechter Hand in (3) und (4), mit welchen $R_n(x,\alpha)$ bzw. $\alpha:(x+p)$ multipliziert sind, wegen § 21, (2) beide unbedingt konvergieren, falls

nur $\Re(x-\alpha) > 0$ vorausgesetzt wird. Es ist also möglich, zwei positive ganze Zahlen N und P so zu bestimmen, daß:

$$(5) \qquad |R_{n,p}(x,\alpha)| < \varepsilon$$

angenommen werden darf, wo ε eine vorgegebene positive Größe von beliebiger Kleinheit bedeutet, wenn nur $n \geqq N$ und zugleich $p \geqq P$ angenommen werden, und somit haben wir den wichtigen Satz bewiesen:

Es bedeute L eine willkürliche, auf der Achse der reellen Zahlen senkrechte Linie, während $\mathfrak{P}_r$ und $\mathfrak{P}_l$ die Halbebenen bezeichnen, welche rechts bzw. links von L liegen, so ist die Formel:

$$(6) \qquad \sum_{r=0}^{r=\infty}\left(\frac{1}{x-\alpha+r}-\frac{1}{x+r}\right)=\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{1}{s}\cdot\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+s-1)}{x(x+1)\cdots(x+s-1)}$$

anwendbar, falls nur x in $\mathfrak{P}_r$ und α in $\mathfrak{P}_l$ liegt, und die Reihe rechter Hand ist gleichmäßig konvergent; natürlich wird vorausgesetzt, daß x weder Null noch negativ und ganz ist.

Offenbar läßt sich die Formel (6) auch folgendermaßen darstellen:

$$(7) \qquad \Psi(x)-\Psi(x-\alpha)=\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{1}{s+1}\cdot\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+s)}{x(x+1)\cdots(x+s)},$$

wo man also $\Re(x-\alpha)>0$ voraussetzen muß. Setzt man in (7) $\alpha=-\frac{1}{2}$, so wird:

$$(8) \qquad \beta(2x)=\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(2s)!}{x(x+1)\cdots(x+s)}\cdot\frac{1}{(s+1)!\,2^{2s+2}},$$

wo man also $\Re(x)>-\frac{1}{2}$ voraussetzen muß; setzt man dagegen in (7) $\alpha=\frac{1}{2}$ und $x+1$ für x, so erhält man in ähnlicher Weise die Formel von Stirling[1]):

$$(9) \qquad \beta(2x+1)=\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(2s+1)!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+s+1)}\cdot\frac{1}{(s+1)!\,2^{2s+2}},$$

wo man ebenfalls $\Re(x)>-\frac{1}{2}$ annehmen muß; aus (9) findet man speziell für $x=0$ die numerische Entwicklung:

$$(10) \qquad \log 2=\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2s+1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2s+2)}\cdot\frac{1}{2s+2}.$$

---

1) Methodus differentialis, p. 27; London 1730.

Wir haben hier noch eine bemerkenswerte Änderung der Formel (6) zu erwähnen; setzen wir in (6) $x+1$ für x und $\alpha+1$ für α, so ergibt sich:

$$\sum_{r=0}^{r=\infty}\left(\frac{1}{x-\alpha+r}-\frac{1}{x+r}\right)+\frac{1}{x}=\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{1}{s}\cdot\frac{(\alpha+1)\cdots(\alpha+s)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+s)};$$

nun ist aber vermöge § 30, (3), wenn man dort $x+1$ für x und $\alpha=1$ einführt:

$$(11)\qquad \frac{1}{x}=\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{(s-1)!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+s)},\qquad \Re(x)>0,$$

und somit findet man die zu (7) analoge Entwicklung:

$$(12)\qquad \Psi(x)-\Psi(x-\alpha)=\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+s)-s!}{s\cdot(x+1)(x+2)\cdots(x+s)},$$

wo man also sowohl $\Re(x)>0$ als $\Re(x-\alpha)>0$ voraussetzen muß.

§ 33. Die Funktionen $\nu(x)$, $P(x,y)$ und $\Theta(x,y)$. Reihen von Binet.

Als erste Anwendung des Satzes im vorigen Paragraphen bestimmen wir die Linie L so, daß 0 in der Halbebene $\mathfrak{P}_l$ liegt; folgen wir dann einem Integrationsweg, welcher ganz in $\mathfrak{P}_l$ fällt, während x in einem Punkte der Halbebene $\mathfrak{P}_r$ abgebildet wird, so darf man die beiden Reihen in § 32, (6), einem bekannten Satze zufolge, gliedweise nach α von 0 bis α integrieren.

Die gliedweise Integration der Reihe linker Hand in § 32, (6) ergibt wegen § 32, (7) für die Funktion:

$$(1)\qquad N(x,\alpha)=\alpha\,\Psi(x)+\log\Gamma(x-\alpha)-\log\Gamma(x)$$

die Entwicklung:

$$(2)\qquad N(x,\alpha)=-\sum_{s=0}^{s=\infty}\left(\log\left(1-\frac{\alpha}{x+s}\right)+\frac{\alpha}{x+s}\right),$$

welche mit der Formel von Mellin § 25, (11) übereinstimmt.

Um nun auch die gliedweise Integration der Reihe rechter Hand in § 32, (6) nach α ausführen zu können, entwickelt man vermöge § 26, (4) die einzelnen Fakultäten in α, und es ergibt sich so die Fakultätenreihenentwicklung:

$$(3)\qquad N(x,\alpha)=\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{\frac{\alpha^{s+1}}{s+1}\cdot C_s^0+\frac{\alpha^s}{s}\cdot C_s^1+\cdots+\frac{\alpha^2}{2}\cdot C_s^{s-1}}{s\cdot x(x+1)(x+2)\cdots(x+s-1)},$$

welche also unter den beiden Bedingungen $\Re(x) > 0$, $\Re(x-\alpha) > 0$ konvergiert.

Mit derselben Bestimmung der Grenzlinie L wie vorher darf man auch die Reihe rechter Hand in § 32, (12) nach α von 0 bis α gliedweise integrieren; man findet hier die Entwicklung:

$$(4) \qquad N(x, \alpha) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\frac{\alpha^{s+1}}{s+1} \cdot C_{s+1}^0 + \frac{\alpha^s}{s} \cdot C_{s+1}^1 + \cdots + \frac{\alpha^2}{2} \cdot C_{s+1}^{s-1}}{s \cdot (x+1)(x+2) \cdots (x+s)},$$

welche ebenfalls unter den Bedingungen $\Re(x) > 0$, $\Re(x-\alpha) > 0$ konvergiert.

Nach diesen allgemeinen Erörterungen wollen wir nunmehr die speziellere Funktion:

$$(5) \qquad \nu(x) = \log x - \Psi(x)$$

näher untersuchen; man findet zuerst die beiden numerischen Werte:

$$(6) \qquad \nu(1) = C, \quad \nu\left(\frac{1}{2}\right) = C + \log 2,$$

während die Formel (1) ohne weiteres die Identitäten:

$$(7) \qquad \nu(x) = N(x, -1),$$

$$(8) \qquad \nu(x) = \frac{1}{x} - N(x+1, 1)$$

liefert, und somit ergibt sich aus (2) die Entwicklung:

$$(9) \qquad \nu(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \left(\frac{1}{x+s} - \log\left(1 + \frac{1}{x+s}\right)\right);$$

endlich findet man aus (3) und (4) für $\alpha = -1$ die beiden von Binet[1]) herrührenden Fakultätenreihenentwicklungen für $\nu(x)$, aus denen wiederum für $x = 1$ zwei Entwicklungen für die Eulersche Konstante folgen.

Die beiden Reihen von Binet sind also für $\Re(x) > 0$ konvergent. Wir erwähnen noch, daß sich die zwei in § 8 eingeführten Funktionen $P(x, y)$ und $\Theta(x, y)$ einfach mittels der Funktion $N(x, \alpha)$ ausdrücken lassen; die Formeln § 8, (12), (13) liefern in der Tat vermöge (1) die Darstellungen:

$$(10) \qquad P(x, y) = -\frac{1}{2}[N(x, iy) + N(x, -iy)],$$

$$(11) \qquad \Theta(x, y) = -\frac{1}{2i}[N(x, iy) - N(x, -iy)],$$

1) Journal de l'École Polytechnique, cahier 37, p. 257; 1839.

und somit findet man aus (3) und (4) ohne Mühe zwei entsprechende Fakultätenreihenentwicklungen für jede der beiden Funktionen $P(x, y)$ und $\Theta(x, y)$; diese Reihen konvergieren sämtlich unter den Bedingungen $\Re(x) > 0$, $\Re(\pm iy) > 0$.

§ 34. Die Funktion $\mu(x)$. Reihen von Binet. Integralformel von Raabe.

Es ist offenbar, daß die Reihen rechter Hand in § 33, (3), (4) mit derselben Bestimmung der Grenzlinie L wie vorher dieselbe Eigenschaft besitzen wie die ursprünglichen Reihen § 32, (6), (12), so daß diese neuen Reihen wieder gliedweise nach α integriert werden dürfen, und zwar von 0 bis α, wenn der Integrationsweg ganz in $\mathfrak{P}_l$ liegt, während x in $\mathfrak{P}_r$ abgebildet wird.

Zu diesem Zwecke bemerken wir zuerst, daß das von 0 bis α genommene Integral des allgemeinen Gliedes rechter Hand in § 33, (2) als Resultat den Ausdruck:

$$\left(x + s - \frac{\alpha}{2}\right) \log\left(1 - \frac{\alpha}{x+s}\right) + \alpha - \frac{\alpha}{2}\left[\log\left(1 - \frac{\alpha}{x+s}\right) + \frac{\alpha}{x+s}\right]$$

liefert; setzen wir daher:

$$M(x, \alpha) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \left[\left(x + s - \frac{\alpha}{2}\right) \log\left(1 - \frac{\alpha}{x+s}\right) + \alpha\right], \tag{1}$$

so leuchtet ein, daß diese Reihe für solche Werte von x und α unbedingt konvergiert, welche kein Glied der Reihe unendlich groß machen, und es ist daher:

$$\int_0^\infty N(x, \alpha) d\alpha = M(x, \alpha) + \frac{\alpha}{2} N(x, \alpha). \tag{2}$$

Integriert man aber andererseits das allgemeine Glied rechter Hand in § 33, (2) nach x, so ergibt sich nach einer einfachen Umformung:

$$-\left[\left(x + s - \frac{\alpha}{2}\right) \log\left(1 - \frac{\alpha}{x+s}\right) + \alpha\right] + \frac{\alpha}{2}\left[\log\left(1 - \frac{\alpha}{x+s}\right) + \frac{\alpha}{x+s}\right] + \\ + \left[\alpha - \frac{\alpha^2}{2(x+s)}\right];$$

daraus folgt dann die Integralformel:

$$\left\{\begin{aligned} -\int_1^x N(x, \alpha) dx = M(x, \alpha) - M(1, \alpha) + \frac{\alpha}{2}\left(N(x, \alpha) - N(1, \alpha)\right) + \\ + \frac{\alpha^2}{2}\left(\Psi(x) - \Psi(1)\right). \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Erinnert man sich aber der Formel § 33, (1), so folgt:

$$(4)\qquad -\int_1^x N(x,\alpha)\,dx = -\,\alpha\log\Gamma(x) - \int_1^x \log\left(\frac{\Gamma(x-\alpha)}{\Gamma(x)}\right)dx.$$

Wir wollen auch hier speziell den Fall $\alpha = -1$ untersuchen und setzen der Kürze halber:

$$(5)\qquad M(x,-1) = \mu(x),$$

woraus sich wegen (1) die Entwicklung:

$$(6)\qquad \mu(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty}\left[\left(x+s+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x+s}\right)-1\right]$$

ergibt; setzt man aber in (1) $x+1$ für x und $\alpha = 1$, so folgt weiter:

$$(7)\qquad M(x+1,1) = -\,\mu(x).$$

Um den Zusammenhang zwischen den Funktionen $\mu(x)$ und $\Gamma(x)$ klar zu erkennen, bedenke man zunächst, daß aus (3) und (4) für $\alpha = -1$:

$$(8)\qquad \mu(x) = \mu(1) + \log\Gamma(x) - \left(x-\frac{1}{2}\right)\log x + x - 1$$

folgt, so daß es sich also nur um die Bestimmung des Zahlenwertes $\mu(1)$ dreht. Zu dem Ende setzt man in (8) $x+\frac{1}{2}$ statt x, woraus:

$$(9)\qquad \mu\left(x+\frac{1}{2}\right) = \mu(1) + \log\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) - x\log\left(x+\frac{1}{2}\right) + x - \frac{1}{2}$$

folgt; weiter ist unter Anwendung von (8) und § 6, (5):

$$\log\Gamma(x) + \log\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) =$$
$$= \mu(2x) - \mu(1) + \left(2x-\frac{1}{2}\right)\log x - 2x + 1 + \log\sqrt{2\pi},$$

also wegen (8) und (9):

$$(10)\qquad \mu(x) + \mu\left(x+\frac{1}{2}\right) = \mu(2x) + x\log\left(\frac{x}{x+\frac{1}{2}}\right) + \log\sqrt{2\pi} + \mu(1).$$

Setzt man aber nun in (10) $x+n$ für x, wo n eine positive ganze Zahl bedeutet, so verschwinden die drei Funktionen:

$$\mu(x+n),\qquad \mu\left(x+n+\frac{1}{2}\right),\qquad \mu(2x+2n),$$

wenn n über jede Grenze hinauswächst, wie dies deutlich aus (6) hervorgeht; denn $\mu(x+n)$ ist ja nur das Restglied der konvergenten Reihe (6) für $\mu(x)$. Man findet also:

$$\mu(1) = \frac{1}{2} - \log \sqrt{2\pi} - \lim_{n=\infty} \left((x+n) \log \left(1 - \frac{1}{2x+2n+1} \right) \right),$$

woraus:

$$\mu(1) = 1 - \log \sqrt{2\pi} \tag{11}$$

folgt; somit ergibt sich schließlich die Formel:

$$\mu(x) = \log \Gamma(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) \log x + x - \log \sqrt{2\pi}; \tag{12}$$

aus (12) aber erhält man für $x = \frac{1}{2}$ das weitere numerische Resultat:

$$\mu\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 - \log 2). \tag{13}$$

Die Reihenentwicklung (6) verdankt man Gudermann[1]).

Nach diesen Erörterungen kehren wir nunmehr zu Formel (2) zurück; eine Integration von 0 bis α in § 33, (3), (4) ergibt vermöge (2) folgende Fakultätenreihenentwicklungen:

$$M(x,\alpha) = -\frac{1}{2} \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\frac{s\alpha^{s+2}}{(s+1)(s+2)} \cdot C_s^0 + \frac{(s-1)\alpha^{s+1}}{s(s+1)} \cdot C_s^1 + \cdots + \frac{1 \cdot \alpha^3}{2 \cdot 3} \cdot C_s^{s-1}}{s \cdot x(x+1)(x+2)\cdots(x+s-1)}, \tag{14}$$

$$M(x,\alpha) = -\frac{1}{2} \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\frac{s\alpha^{s+2}}{(s+1)(s+2)} \cdot C_{s+1}^0 + \frac{(s-1)\alpha^{s+1}}{s(s+1)} \cdot C_{s+1}^1 + \cdots + \frac{1 \cdot \alpha^3}{2 \cdot 3} \cdot C_{s+1}^{s-1}}{s \cdot (x+1)(x+2)\cdots(x+5)}, \tag{15}$$

welche ebenfalls beide für $\Re(x) > 0$, $\Re(x - \alpha) > 0$ konvergieren.

Setzt man in (14) und (15) $\alpha = -1$, so gewinnt man die Fakultätenreihen von Binet[2]). Die eine dieser Reihen ist später von Cauchy[3]) hergeleitet worden, während Jensen[4]) in aller Strenge die vier Reihen von Binet, welche wir hier und in dem vorhergehenden Paragraphen in verallgemeinerter Form entwickelt haben, hergeleitet hat; die Methode von Jensen erlaubt indessen keine vollständige Bestimmung der Konvergenzbereiche unserer Reihen.

Wir haben endlich noch die Raabesche Integralformel aus den vorhergehenden Resultaten herzuleiten. Zu dem Ende eliminieren wir aus (2) und § 33, (1) die Funktion $N(x, \alpha)$, dann erhält man:

$$\int_0^\alpha \log \Gamma(x - \alpha)\, d\alpha = M(x, \alpha) + \frac{\alpha}{2}(\log \Gamma(x - \alpha) + \log \Gamma(x)). \tag{16}$$

---

1) Journal für Mathematik, Bd. 29, p. 209—212; 1845.

2) Journal de l'École Polytechnique, cahier 27, pp. 231, 339; 1839.

3) Exercices d'Analyse et de la Physique mathématique, Bd. II, p. 391; Paris 1841.

4) Nyt Tidsskrift for Mathematik, Bd. 2B, pp. 66—72, 83—84; 1891.

Daraus folgt für $\alpha = -1$ die gesuchte Formel:

$$(17)\qquad \int_0^1 \log \Gamma(x+\alpha)\,d\alpha = x(\log x - 1) + \log\sqrt{2\pi}.$$

In seiner ersten Abhandlung[1]), welche die Formel (17) enthält, hat Raabe den Fall betrachtet, wo x eine ganze, nicht negative Zahl bedeutet, in der zweiten Abhandlung[2]) den allgemeineren Fall, wo x reell und nicht negativ angenommen wird.

Spätere Beweise der Raabeschen Formel treten sehr zahlreich auf; wir erwähnen z. B. die Beweise von Stern[3]), Björling[4]), Bertrand[5]), Malmstén[6]), Stiltjes[7]) und Lerch[8]).

In neueren Arbeiten von Glaisher[9]) und Barnes[10]) tritt auch die allgemeinere Funktion (16) auf.

Wir erwähnen noch, daß die Formeln § 8, (12), (13) in Verbindung mit (12) für $P(x,y)$ und $\Theta(x,y)$ folgende Darstellungen liefern:

$$(18)\quad \begin{cases} P(x,y) = \mu(x) - \frac{1}{2}\left(\mu(x+iy) + \mu(x-iy)\right) - y\cdot\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \\ \qquad - \left(x - \frac{1}{2}\right)\log\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}, \end{cases}$$

$$(19)\quad \begin{cases} \Theta(x,y) = \frac{1}{2i}\left(\mu(x+iy) - \mu(x-iy)\right) + y\cdot\nu(x) + y\cdot\log\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} - y + \\ \qquad + \left(x-\frac{1}{2}\right)\operatorname{arctg}\frac{y}{x}. \end{cases}$$

1) Journal für Mathematik, Bd. 25, p. 149; 1843.
2) Ebenda, Bd. 28, p. 12—14; 1844.
3) Zur Theorie der Eulerschen Integrale, Göttinger Studien 1847, p. 9.
4) Öfversigt der Stockholmer Akademie 1856, p. 181—182.
5) Traité de calcul différentiel et intégral, Bd. II, Zitat von Hermite, Cours lithographiés, p. 102; Paris 1883.
6) Acta Mathematica, Bd. 5, p. 34; 1884.
7) Nieuw Archief, Bd. 2, p. 100—104; 1878.
8) Giornale di matematiche, Bd. 26, p. 39—40; 1888.
9) Quarterly Journal, Bd. 28; 1896.
10) Ebenda, Bd. 31; 1900.

Kapitel VII.

Die Funktionen $\Gamma(x)$ und $\Psi(x)$ für sehr große $|x|$.

§ 35. Potenzreihen in α für $M(x, \alpha)$ und $N(x, \alpha)$.

Gehen wir von den Definitionen § 33, (2) und § 34, (1) aus, so leuchtet ein, daß die beiden Funktionen $M(x, \alpha)$ und $N(x, \alpha)$ in α analytisch sein müssen, falls nur $|\alpha| < |x + s|$ angenommen wird, indem s eine willkürliche ganze und nicht negative Zahl bedeutet. Die Werte der nach α genommenen Ableitungen kann man direkt aus den obengenannten Definitionen herleiten, und es ergeben sich so die Potenzreihenentwicklungen:

$$N(x, \alpha) = \sum_{s=2}^{s=\infty} \frac{\alpha^s}{s} \cdot f_s(x), \tag{1}$$

$$M(x, \alpha) = -\sum_{s=2}^{s=\infty} \frac{(s-1) \cdot \alpha^{s+1}}{2s(s+1)} \cdot f_s(x), \tag{2}$$

wo der Kürze halber:

$$f_s(x) = \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{1}{(x+r)^s}, \quad s \geqq 2 \tag{3}$$

gesetzt worden ist, daraus aber folgt:

$$f_s(x) = \frac{(-1)^s}{(s-1)!} \cdot \Psi^{(s-1)}(x). \tag{4}$$

Die Reihen (1) und (2) sind konvergent, falls $|\alpha| < |x + s|$ angenommen wird, wo s eine ganze, nicht negative Zahl bedeutet; setzt man speziell in (1) und (2) $|x| = 1$ und $\Re(x) > 0$, so darf man offenbar $\alpha = \pm 1$ annehmen, und der bekannte Satz von Abel ergibt dann für $\alpha = -1$ die weiteren Formeln:

$$\nu(x) = \sum_{s=2}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{s} \cdot f_s(x), \tag{5}$$

$$\mu(x) = \sum_{s=2}^{s=\infty} \frac{(-1)^s (s-1)}{2s(s+1)} \cdot f_s(x). \tag{6}$$

Setzt man dagegen $\alpha = 1$ und $x + 1$ statt x, so erhält man die ähnlichen Entwicklungen:

$$\frac{1}{x} - \nu(x) = \sum_{s=2}^{s=\infty} \frac{1}{s} \cdot f_s(x+1), \tag{7}$$

$$\mu(x) = \sum_{s=2}^{s=\infty} \frac{s-1}{2s(s+1)} \cdot f_s(x+1). \tag{8}$$

Die Formeln (5), (6), (7) und (8) rühren von Binet[1]) her.

Beachtet man, daß (5) für $x = 1$ konvergiert, so ergibt diese Annahme für die Eulersche Konstante diejenige Reihenentwicklung, welche wir schon in § 2, (12) gefunden haben.

§ 36. Die Formel von Stirling.

Wir gehen von der Formel § 35, (8) aus und denken uns x *positiv* und *sehr groß;* aus der Identität:

$$s^2 - 5s + 6 = (s-2)(s-3)$$

folgert man ohne weiteres, daß für jedes ganzzahlige s, das größer als 1 ist:

$$\frac{s-1}{s(s+1)} \leqq \frac{1}{6}$$

sein muß; daraus ergibt sich für positive x:

$$\mu(x) < \frac{1}{12} \cdot \sum_{s=2}^{s=\infty} f_s(x+1). \tag{1}$$

Führt man aber rechter Hand in (1) für jedes $f_s(x+1)$ die aus § 35, (3) hergeleitete Reihe ein, so entsteht eine Doppelreihe, deren Glieder sämtlich *positiv* sind, und in welcher jede Horizontal- und Vertikalreihe konvergiert; in dieser Doppelreihe darf man daher die Glieder willkürlich ordnen. Da nun für $s \geqq 1$ und für $x > 0$:

$$\frac{1}{(x+s)^2} + \frac{1}{(x+s)^3} + \frac{1}{(x+s)^4} + \cdots = \frac{1}{x+s-1} - \frac{1}{x+s}$$

ist, so findet man aus (1), indem man zuerst die Vertikalreihen summiert, daß:

$$\mu(x) < \frac{1}{12x}$$

sein muß, woraus der wichtige Satz folgt:

Bezeichnet Θ eine reelle Größe, so daß $0 \leqq \Theta < 1$ ist, während x eine positive Zahl bedeutet, so hat man:

$$\log \Gamma(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \log x - x + \log \sqrt{2\pi} + \frac{\Theta}{12x}. \tag{2}$$

---

1) Journal de l'École Polytechnique, cahier 27, pp. 226, 248, 249; 1839. Comptes rendus, Bd. 9, p. 39—45; 1839.

Ist zudem x der positiven ganzen Zahl n gleich, so findet man für sehr große n die sogenannte Stirlingsche Formel[1]):

$$\log((n-1)!) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\log n - n + \log\sqrt{2\pi} + \frac{\Theta}{12n}. \tag{3}$$

Die Stirlingsche Formel läßt sich auch folgendermaßen schreiben:

$$(n-1)! = n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n}\cdot\sqrt{2\pi}\,(1+\varepsilon_n), \tag{4}$$

wo ε_n mit wachsendem n der Grenze Null zustrebt.

Die Formel (3) ist späterhin von vielen Mathematikern hergeleitet worden; wir erwähnen z. B. Liouville[2]), Raabe[3]), Serret[4]), Bonnet[5]), Glaisher[6]) und Lerch[7]). Die oben gegebene elegante Herleitung rührt von Jensen[8]) her.

Es leuchtet ein, daß die Formel (4) erlaubt, den Gaußschen Grenzwert für $\Gamma(x)$ zu modifizieren; wir finden unmittelbar, daß:

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi}\cdot\lim_{n=\infty}\frac{e^{-n}\cdot n^{x+n-\frac{1}{2}}}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} \tag{5}$$

sein muß; diese Darstellung ist zuerst von Enneper[9]), später von Gilbert[10]) bemerkt worden.

§ 37. Die Funktionen $\mu(x)$ und $\nu(x)$ für sehr große $|x|$.

Wir wollen nunmehr allgemein die beiden Funktionen $\mu(x)$ und $\nu(x)$ für sehr große Werte von $|x|$ untersuchen. Zu dem Ende gehen wir von den aus § 33, (3) und § 34, (14) hergeleiteten Fakultätenreihen aus; diese Reihen sind für $\Re(x) > 0$ konvergent und somit wegen des Grenzwertes § 21, (2) sicher für $\Re(x) > 1$

1) Methodus differentialis, p. 135. Stirling gibt nicht genau die Formel (3), sondern eine allgemeinere.

2) Comptes rendus, Bd. 9, p. 105—108; 1839. Journal de Mathématiques, Bd. 4, p. 317—322; 1839.

3) Journal für Mathematik, Bd. 25, p. 147—159; 1843.

4) Comptes rendus, Bd. 50, p. 662—666; 1860.

5) Ebenda, Bd. 50, p. 862—866; 1860.

6) Quarterly Journal, Bd. 15, p. 57—64; 1877.

7) Časopis, Bd. 24, p. 129—132; 1895 (böhmisch).

8) Nyt Tidsskrift for Mathematik Bd. 2B, p. 43; 1891

9) Dissertation, p. 10; Göttingen 1856.

10) Recherches sur le développement de la fonction Γ, p. 7; Mém. de Belgique, Bd. 41; 1873.

unbedingt konvergent. Es sei nun y eine endliche Zahl, so daß $\Re(y) > 1$ ist, während $|x|$ sehr groß und zugleich $\Re(x) > 1$ angenommen wird; dann sind die beiden Reihenpaare für $\mu(y)$, $\nu(y)$ und für $\mu(x)$, $\nu(x)$ sicher sämtlich *unbedingt* konvergent; da nun immer y so bestimmt werden kann, daß für jeden ganzen positiven Wert von s und für sehr große $|x|$:

$$\left| \frac{(y+1)(y+2)\cdots(y+s)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+s)} \right| < 1$$

wird, so findet man, indem die Koeffizienten der obenerwähnten Fakultätenreihen der Kürze halber durch A_s und B_s bezeichnet werden:

$$|\mu(x)| < \left|\frac{y}{x}\right| \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{|A_s|}{|y(y+1)\cdots(y+s)|},$$

$$|\nu(x)| < \left|\frac{y}{x}\right| \cdot \sum_{s=\infty}^{s=0} \frac{|B_s|}{|y(y+1)\cdots(y+s)|};$$

somit haben wir bewiesen, daß es möglich ist, eine so große positive Zahl R zu bestimmen, daß für $\Re(x) > 1$ und $|x| \geq R$ immer:

$$|\mu(x)| < \varepsilon, \quad |\nu(x)| < \varepsilon \tag{1}$$

sein muß, wo ε eine vorgegebene positive Größe von beliebiger Kleinheit bedeutet.

Es ist aber sehr leicht, die Bedingungen für die Ungleichungen (1) zu erweitern. Zu diesem Zwecke gehen wir von den Entwicklungen § 33, (9) und § 34, (6) aus und erhalten so ohne weiteres die beiden Differenzengleichungen:

$$\mu(x+1) = \mu(x) - \left[\left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1\right], \tag{2}$$

$$\nu(x+1) = \nu(x) - \left[\frac{1}{x} - \log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]; \tag{3}$$

nun gibt aber die logarithmische Reihe die beiden für $|x| > 1$ konvergenten Entwicklungen:

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1 = \sum_{s=2}^{s=\infty} \frac{(-1)^s(s-1)}{2s(s+1)} \cdot \frac{1}{x^s},$$

$$\frac{1}{x} - \log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \sum_{s=2}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{s} \cdot \frac{1}{x^s},$$

so daß es möglich sein muß, $|x|$ so groß zu wählen, daß:

$$(4) \qquad |\mu(x+1)-\mu(x)|<\delta, \qquad |\nu(x+1)-\nu(x)|<\delta$$

wird, wo δ dieselbe Bedeutung wie ε in (1) hat.

Setzt man aber nun in (4) $\Re(x)>0$ voraus, so leuchtet ein, daß die Ungleichungen (1) auch in diesem Falle richtig sein müssen. Dasselbe muß dann auch für $\Re(x)>-1$ gelten, und durch vollständige Induktion zeigt man ohne Mühe, daß die Ungleichungen (1) für $\Re(x)>-k$, wo k eine willkürliche endliche positive Zahl bedeutet, richtig sein müssen.

Nach diesen Erörterungen wollen wir uns der Definition:

$$(5) \qquad \mu(x)=\log\Gamma(x)-\left(x-\frac{1}{2}\right)\log x+x-\log\sqrt{2\pi}$$

bedienen. Wir setzen der Kürze halber:

$$(6) \qquad x=|x|e^{i\Theta}, \qquad -\pi<\Theta<+\pi,$$

indem wir die Funktion $\mu(x)$ durch einen Querschnitt eindeutig machen, welcher die Achse der negativen reellen Zahlen, den Ursprung mitgerechnet, abtrennt; die Amplitude Θ kann also niemals den Wert $\pm\pi$ erreichen.

Mit dieser Definition von Θ findet man aus (5) die ähnliche Formel:

$$(7) \quad \mu(-x)=\log\Gamma(-x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)(\log x\mp\pi i)-x-\log\sqrt{2\pi},$$

wo $\mp\pi i$ zu nehmen ist, je nachdem $\Theta \gtrless 0$ vorausgesetzt wird; nun zeigt aber die Eulersche Formel, daß:

$$\log\Gamma(x)+\log\Gamma(-x)=\log\pi-(\log x\mp\pi i)+\log\left(\frac{e^{\pi xi}-e^{\pi xi}}{2xi}\right)$$

ist, wo das Zeichen von πi wie vorher zu bestimmen ist. Somit ergibt sich aus (5) und (7) die weitere Identität:

$$(8) \qquad \mu(x)+\mu(-x)=\mp\left(x-\frac{1}{2}\right)\pi i-\log\left(\frac{e^{\pi xi}-e^{-\pi xi}}{i}\right).$$

Setzt man nun aber $x=\pm x'$, je nachdem $\Theta \gtrless 0$ angenommen wird, so erhält man aus (8):

$$(9) \qquad \mu(x)+\mu(-x)=\pm\frac{\pi i}{2}\mp\log i-\log(1-e^{-2\pi x' i}).$$

Nun haben wir aber bewiesen, daß es möglich ist, die positive Zahl R so groß zu wählen, daß $\mu(\pm iR)$, absolut genommen, kleiner

als ε wird, daher muß in (9) der Wert von $\log i$ so bestimmt werden, daß:

$$\pm \frac{\pi i}{2} \mp \log i = 0$$

ist. Somit haben wir die allgemeingültige Formel:

$$\mu(x) + \mu(-x) = -\log\left(1 - e^{-2\pi x' i}\right) \tag{10}$$

bewiesen, wo also $x' = \pm x$ zu setzen ist, je nachdem $\Theta \gtrless 0$ angenommen wird.

Beachtet man endlich die Identität:

$$\nu(x) = \frac{1}{2x} - \mu^{(1)}(x), \tag{11}$$

so folgt aus (10) die ähnliche Formel:

$$\nu(x) - \nu(-x) = \frac{1}{x} + \frac{2\pi i e^{-2\pi x' i}}{1 - e^{-2\pi x' i}} \cdot \frac{x'}{x}. \tag{12}$$

Aus (10) und (12) geht aber deutlich hervor, daß die Ungleichungen (1) noch für $\Re(x) < 0$ richtig bleiben, wenn nur $|\Re(ix)|$ hinlänglich groß angenommen wird. Somit haben wir den allgemeinen Satz bewiesen:

Läßt man in willkürlicher Weise die Variable x sich von der Achse der negativen Zahlen unendlich entfernen, so konvergieren die beiden Funktionen $\mu(x)$ und $\nu(x)$ gleichmäßig gegen die Null.

Dieser Satz ist wohl zuerst von Jensen[1]) explizite ausgesprochen worden; er ist indessen schon in den Formeln von Stiltjes[2]) enthalten.

Es ist offenbar, daß die Bedingung unseres Satzes befriedigt ist, wenn sich die Variable x nach einem Radiusvektor entfernt, welcher einen angebbaren Winkel mit der Achse der negativen reellen Zahlen bildet.

Weiter leuchtet ein, daß die beiden Funktionen $\mu(x)$ und $\nu(x)$ durch die Differenzengleichungen (2), (3) und die Bedingung (1) eindeutig definiert werden können.

---

1) Nyt Tidsskrift for Mathematik, Bd. 2B, p. 45; 1891.
2) Journal de Mathématiques, (4) Bd. 5, p. 433; 1889.

§ 38. Die wesentlich singuläre Stelle $x = \infty$ für $\Gamma(x)$. Formel von Pincherle.

Die Untersuchungen des vorhergehenden Paragraphen erlauben uns, die Definition der Gammafunktion § 1, (2) zu verallgemeinern; der eben bewiesene allgemeine Satz über das gleichmäßige Verschwinden von $|\mu(x)|$ für $|x| = \infty$ ergibt nämlich erstens wegen § 37, (5), daß:

$$\lim_{|x|=\infty} \frac{\Gamma(x)}{x^{x-\frac{1}{2}} \cdot e^{-x} \cdot \sqrt{2\pi}} = 1 \tag{1}$$

sein muß, wenn sich nur die Variable x von der Achse der negativen reellen Zahlen unendlich entfernt.

Weiter gehen wir von der offenbaren Identität:

$$\frac{\Gamma(x+y)}{(x+y)^{x+y-\frac{1}{2}} e^{-x-y}\sqrt{2\pi}} : \frac{\Gamma(x)}{x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}\sqrt{2\pi}} = \frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x) e^{-y}\left(1+\frac{y}{x}\right)^{x+y-\frac{1}{2}} \cdot x^y} \tag{2}$$

aus, wo y als endlich, $|x|$ aber als sehr groß anzunehmen ist; bedeuten nun α und β endliche Größen, und setzen wir:

$$k = \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^{x+\beta},$$

wo $|x|$ sehr groß ist, so ergibt sich offenbar:

$$\log k = (x+\beta) \log\left(1 + \frac{\alpha}{x}\right), \qquad \lim_{|x|=\infty} \log k = \alpha$$

und somit auch:

$$\lim_{|x|=\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^{x+\beta} = e^{\alpha}; \tag{3}$$

mit Zuhilfenahme der Formel (3) findet man nun unmittelbar aus (1) und (2) folgende Verallgemeinerung der Formel § 1, (2):

$$\lim_{|x|=\infty} \frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x) x^y} = 1, \tag{4}$$

wo also $|y|$ endlich bleiben muß, die Variable x aber sich von der Achse der reellen negativen Zahlen unbegrenzt entfernt.

In vielen Untersuchungen braucht man den Wert von

$$|\Gamma(\xi + i\eta)|,$$

wo ξ und η reell sind, ξ aber endlich bleibt, während $|\eta|$ sehr groß wird; über diesen Zahlenwert hat Pincherle[1]) den folgenden Satz bewiesen:

1) Rendiconti della Reale Accad. dei Lincei (4) Bd. 4, pp. 694—700 792—799; 1888

Setzt man $x = \xi + i\eta$, wo ξ und η reell sind, $|\xi|$ aber eine gewisse endliche positive Zahl nicht überschreitet, so ist immer, wie groß auch $|\eta|$ angenommen wird:

$$(5) \qquad |\Gamma(\xi + i\eta)| < |\xi + i\eta|^{\xi - \frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{\pi}{2}|\eta|} \cdot \Phi,$$

wo Φ eine endliche, nicht verschwindende positive Größe bedeutet.

Man hat nämlich vermöge der Definition § 34, (12) für $\mu(x)$:

$$(6) \qquad \Gamma(x) = \sqrt{2\pi} \cdot x^{x - \frac{1}{2}} \cdot e^{-x + \mu(x)};$$

setzt man daher wie im vorigen Paragraphen:

$$x = \xi + i\eta = |x| \cdot e^{i\Theta}, \quad -\pi < \Theta < +\pi,$$

so folgt aus (6):

$$(7) \qquad |\Gamma(x)| = |x|^{\xi - \frac{1}{2}} \cdot e^{-\Theta\eta} \cdot e^{-\xi + \mu'} \cdot \sqrt{2\pi},$$

wo

$$\mu(\xi + i\eta) = \mu' + i\mu''$$

gesetzt worden ist. Dem Satze des § 37 zufolge ist es aber hier möglich, $|\eta|$ so groß zu wählen, daß $|\mu'|$ und $|\mu''|$ beide beliebig klein angenommen werden können.

Weiter zeigt die gewöhnliche geometrische Darstellung der komplexen Zahl $x = \xi + i\eta$, daß hier Θ dem Werte $\pm \frac{\pi}{2}$ sehr nahe kommt, je nachdem $\eta \gtrless 0$ vorausgesetzt wird; also findet man:

$$\eta\Theta = \eta \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi} = \frac{\pi}{2}|\eta| \pm \eta \operatorname{arctg} \frac{\xi}{\eta};$$

setzt man daher

$$(8) \qquad \Phi = \sqrt{2\pi} \cdot e^{-\xi + \mu'} \cdot e^{\mp \eta \operatorname{arctg} \frac{\xi}{\eta}},$$

so ist der Satz von **Pincherle** vollkommen bewiesen; denn man hat offenbar für sehr große $|\eta|$:

$$\eta \operatorname{arctg} \frac{\xi}{\eta} = \xi + \delta,$$

wo $|\delta|$ beliebig klein angenommen werden darf.

Aus (5) folgt, daß es möglich ist, $|\eta|$ so groß zu wählen, daß

$$(9) \qquad |x^k \cdot \Gamma(x)| < \varepsilon$$

wird, wo k eine willkürliche endliche Zahl bedeutet, während ε eine vorgegebene positive Größe von beliebiger Kleinheit ist.

Bedeuten weiter a und b zwei endliche Zahlen, so folgt aus (5), daß unter den dort für x angegebenen Voraussetzungen:

$$\frac{\Gamma(x-a)}{\Gamma(x-b)} = |\,x\,|^{b'-a'} \cdot \Phi' \tag{10}$$

sein muß, wo Φ' eine Größe von derselben Natur wie Φ in (5) be deutet, während

$$a = a' + ia'', \quad b = b' + ib''$$

gesetzt worden ist; in ähnlicher Weise findet man mit denselben Bezeichnungen wie vorher:

$$\left|\frac{\Gamma(x-a)}{\Gamma(b-x)}\right| = |\,x\,|^{2\zeta - a' - b'} \cdot \Phi'', \tag{11}$$

und es ist leicht, Formeln von derselben Art wie (10) und (11), aber mit mehreren Faktoren im Zähler und Nenner herzuleiten; solche Formeln treten zu wiederholten Malen in Untersuchungen von Mellin[1]) auf.

Es ist klar, daß uns die vorhergehenden Formeln über die Natur der wesentlich singulären Stelle $x = \infty$ für die ganze transzendente Funktion $1 : \Gamma(x)$ völligen Aufschluß gewähren. Folgen wir z. B. der Achse der positiven reellen Zahlen, so nimmt unsere Funktion stärker ab wie e^{-kx}, wo k eine beliebig große, aber endliche positive Zahl bedeutet; folgen wir dagegen der Achse der rein imaginären Zahlen, so wächst unsere Funktion wie $e^{\frac{\pi}{2}|x|}$.

Wir erwähnen noch, daß die Formel (6) in Verbindung mit § 6, (9) die Produktentwicklung:

$$\Gamma(x) = 2x^x \cdot e^{-x} \cdot \prod_{s=1}^{s=\infty} \sqrt[2^s]{B\left(2^{s-1}x, \frac{1}{2}\right)} \tag{12}$$

liefert, welche man Catalan[2]) verdankt.

§ 39. Die Nullstellen von $\Psi(x)$.

Erinnert man sich der Bedeutung der Funktion:

$$\nu(x) = \log x - \Psi(x),$$

so läßt sich der in § 37 über $\nu(x)$ bewiesene Satz auch folgender maßen formulieren:

---

1) Man vergleiche z. B. Acta Mathematica, Bd. 15, p. 317—384; 1881.

2) Journal de Mathématiques (3) Bd. 1, p. 228; 1875.

Läßt man in ganz willkürlicher Weise die Variable x sich sehr weit von der Achse der negativen Zahlen entfernen, so ist es möglich, eine positive Zahl R so groß zu wählen, daß:

$$|\Psi(x) - \log x| < \varepsilon \tag{1}$$

wird, wo ε eine vorgegebene positive Größe von beliebiger Kleinheit bedeutet, wenn nur $|x| \geqq R$ angenommen wird.

Wir wollen jetzt diesen Satz auf eine Untersuchung über die Nullstellen der Funktion $\Psi(x)$ anwenden; setzt man in:

$$\Psi(x) = -C + \sum_{s=0}^{s=\infty} \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{x+s} \right) \tag{2}$$

$x = \alpha + i\beta$ und $\Psi(\alpha + i\beta) = A + iB$, wo α, β und A, B sämtlich reell sind, so ergibt sich:

$$B = \beta \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{1}{(\alpha + s)^2 + \beta^2},$$

woraus deutlich hervorgeht, daß B nur mit β verschwinden kann, d. h.:

$\Psi(x)$ kann nur reelle Nullstellen besitzen.

Aus der Definition (2) findet man weiter:

$$\Psi(x) - \Psi(y) = (x - y) \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{1}{(x+s)(y+s)}; \tag{3}$$

denkt man sich daher x und y als positiv, so ist immer:

$$\Psi(x) > \Psi(y), \quad \text{wenn} \quad x > y; \tag{4}$$

nun hat man aber:

$$\Psi(1) = -C < 0, \qquad \Psi(2) = 1 - C > 0,$$

und da $\Psi(x)$ für positive x eine in x kontinuierliche Funktion ist, so folgt daraus der Satz:

$\Psi(x)$ hat eine einzige positive Nullstelle, welche zwischen $x = 1$ und $x = 2$ liegt.

Nach Gauß[1]) ist diese positive Nullstelle näherungsweise durch den Wert:

$$x = 1{,}4616321 \cdots$$

bestimmt.

---

1) Comment. Gott., Bd. 2, p. 27; 1812. Werke, Bd. III, p. 147. Deutsche Ausgabe, p. 35.

Was die negativen Werte von x betrifft, so hat $\Psi(x)$ einfache Pole in den negativen ganzen Zahlen sowie auch in $x = 0$. Es sei nun n eine ganze nicht negative Zahl, σ aber eine kleine positive Größe, dann ist es vermöge (2) möglich, den Wert von σ so klein zu wählen, daß gleichzeitig:

$$\Psi(-n-\varepsilon) > 0, \quad \Psi(-n-1+\varepsilon) < 0 \tag{5}$$

sein muß, wenn nur $\varepsilon \leqq \sigma$ angenommen wird. Bedeuten weiter x und y zwei negative Zahlen, so daß:

$$-n > x > y > -n-1$$

ist, so ist auch vermöge (3):

$$\Psi(x) > \Psi(y),$$

denn $x - y$ ist positiv, und dasselbe gilt für die einzelnen Glieder der unendlichen Reihe rechter Hand in (3); im Intervalle:

$$-n > x > -n-1$$

ist die Funktion $\Psi(x)$ daher beständig abnehmend, und zwar geht sie von $+\infty$ bis $-\infty$; die Funktion $\Psi(x)$ kann in dem angegebenen Intervalle daher nur eine einzige Nullstelle haben; wir bezeichnen diese Nullstelle mit x_n, so daß also:

$$\Psi(x_n) = 0, \quad -n > x_n > -n-1 \tag{6}$$

ist; weiter setzen wir der Kürze halber:

$$x = -n-1+y_n, \quad 0 < y_n < 1$$

und finden somit wegen (6) und § 5, (7) die Gleichung:

$$\pi \operatorname{cotg}(\pi y_n) = \Psi(1-x_n) = \Psi(n+2-y_n) \tag{7}$$

und daraus vermöge (1), wenn n eine sehr große Zahl bedeutet:

$$\pi \operatorname{cotg}(\pi y_n) = \log n + \delta_n, \quad \lim_{n=\infty} \delta_n = 0;$$

daraus folgt:

$$y_n = \frac{1}{\pi} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{\log n + \delta_n}\right)$$

oder, was offenbar dasselbe ist:

$$y_n = \frac{1}{\log n} + \frac{\delta_n'}{\log n}, \quad \lim_{n=\infty} \delta_n' = 0;$$

damit ist aber der folgende Satz von Hermite[1]) bewiesen:

Es bedeute n eine ganze, nicht negative Zahl, dann hat die Funktion $\Psi(x)$ im Intervalle $-n > x > -n-1$ eine und nur eine einzige Nullstelle x_n, welche sich mit wachsendem n dem Wert:

---

1) Journal für Mathematik, Bd. 90, p. 332—338; 1881.

$$x_n = -n - 1 + \frac{1}{\log n} \tag{8}$$

mehr und mehrt nähert.

Erinnert man sich nun, daß $\Gamma(x)$ keine endliche Nullstelle hat, so zeigt die Identität:

$$\Gamma^{(1)}(x) = \Gamma(x) \cdot \Psi(x),$$

daß $\Gamma^{(1)}(x)$ genau dieselben Nullstellen haben muß wie $\Psi(x)$, und daß diese Nullstellen mit den Maximis und Minimis von $\Gamma(x)$ zusammenfallen müssen; diese Maxima und Minima nähern sich daher, wie Hermite[1]) und Bourguet[2]) bemerkt haben, mehr und mehr den Polen von $\Gamma(x)$. Diese Bemerkungen sind für die graphische Darstellung von $\Gamma(x)$ für reelle x sehr nützlich; eine solche graphische Darstellung ist zuerst von Bessel[3]), später und minder ausführlich von Schenkel[4]) geliefert worden.

Wir erwähnen noch, daß (1) vermöge § 6, (10) für die Funktion $\nu(x)$ folgende neue Entwicklung liefert:

$$\nu(x) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \beta(2^s \cdot x). \tag{9}$$

§ 40. Über die Nullstellen von $\beta(x)$.

In diesem Kapitel wollen wir noch einige Bemerkungen über die Nullstellen der Funktion:

$$\beta(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{x+s} \tag{1}$$

hervorheben, indem wir zuerst den folgenden Satz beweisen wollen:

Die Funktion $\beta(x)$ hat keine reelle Nullstelle.

Aus (1) findet man nämlich:

$$\beta(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{1}{(x+2s)(x+2s+1)}, \tag{2}$$

so daß $\beta(x)$ für positive x immer *positiv* sein muß; weiter finden wir:

$$\beta(x-1) = \frac{1}{x-1} - \beta(x), \tag{3}$$

$$\beta(x-2) = \frac{1}{(x-1)(x-2)} + \beta(x); \tag{4}$$

1) Journal für Mathematik, Bd. 90, p 332—338; 1881.
2) Atti di Torino, Bd. 16, p. 758—772; 1881.
3) Abhandlungen, Bd. II, p. 351.
4) Dissertation, Bern 1894.

setzt man daher $x < 1$ und $\beta(x) > 0$ voraus, so leuchtet ein, daß gleichzeitig:

$$\beta(x-1) < 0, \quad \beta(x-2) > 0$$

sein muß; da nun vermöge (2), für $0 < x < 1$, $\beta(x)$ sicher positiv ist, so ergibt die vollständige Induktion unmittelbar den folgenden Satz:

Bedeutet n eine ganze, nicht negative Zahl, so ist $\beta(x)$ in den Intervallen $-2n < x < -2n-1$ immer negativ, in den Intervallen $-2n-1 > x > -2n-2$ dagegen immer positiv.

Was die eventuellen komplexen Nullstellen von $\beta(x)$ betrifft, setze man:

$$x = \xi + i\eta, \quad \beta(\xi + i\eta) = A + iB, \tag{5}$$

wo ξ und η, A und B sämtlich reell sind; dann folgt aus (1):

$$A = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s(\xi+s)}{(\xi+s)^2+\eta^2}, \tag{6}$$

$$B = \eta \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{(\xi+s)^2+\eta^2}; \tag{7}$$

aus (7) geht aber deutlich hervor, daß, für $\xi \geqq -\frac{1}{2}$, B nur mit η verschwinden kann; denn B und η müssen dann immer dasselbe Zeichen haben. Daraus ergibt sich der Satz:

Die Funktion $\beta(x)$ hat in der durch die Ungleichung $\Re(x) \geqq -\frac{1}{2}$ bestimmten Halbebene überhaupt keine endliche Nullstelle.

Es ist mir nicht gelungen allgemein zu beweisen, daß $\beta(x)$ in der durch die Ungleichung $\Re(x) < -\frac{1}{2}$ bestimmten Halbebene wirklich komplexe Nullstellen hat; doch halte ich dies für wahrscheinlich.

Schlömilch[1]) behauptet bewiesen zu haben, daß die Gleichung:

$$\beta(x) = -1 \tag{8}$$

keine komplexe Nullstelle besitzen kann. Th. Claußen[2]) hat indessen nachgewiesen, daß diese Behauptung nicht stichhaltig ist, indem er näherungsweise zwei Nullstellen der Gleichung (8):

$$x = -0{,}5794 + i\,0{,}6950, \quad x = -2{,}51 + i\,0{,}63$$

angibt.

1) Grunerts Archiv, Bd. 12, p. 293—297; 1849.

2) Ebenda, Bd. 13, p. 334—336; 1849.

Kapitel VIII.

Der Satz von Hölder.

§ 41. Hilfssatz. Über eine Differenzengleichung.

Hölder[1]) hat eine interessante negative Eigenschaft der Funktionen $\Gamma(x)$ und $\Psi(x)$ entdeckt, indem er bewiesen hat, daß keine dieser beiden Funktionen einer algebraischen Gleichung Genüge leisten kann. Der Satz von Hölder kann sicher sehr beträchtlich verallgemeinert werden; wir wollen uns indessen hier auf eine der einfachsten dieser Verallgemeinerungen beschränken, welche mit der Mehrzahl der vorhergehenden Funktionen in sehr naher Verwandtschaft steht. Es ist aber sehr bemerkenswert, daß der Beweis von Hölder auch für diesen allgemeineren Fall beinahe wortgetreu anwendbar ist.

Um nicht die folgende Darstellung unterbrechen zu müssen, wollen wir zuerst den folgenden Hilfssatz beweisen:

Die lineare, nicht homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$(1) \qquad \sum_{s=0}^{s=\infty} a_s \cdot f^{(n-s)}(x) = A(x+\omega) - kA(x),$$

wo k und ω konstant sind, während $A(x)$ eine in x rationale Funktion bedeutet, kann keine rationale gebrochene Lösung besitzen, wenn $A(x)$ nicht selbst gebrochen ist, und diese eventuelle gebrochene Lösung muß sich dann immer unter der Form:

$$(2) \qquad R(x) = R_1(x+\omega) - kR_1(x)$$

darstellen, wo $R_1(x)$ wieder eine gebrochene Funktion ist.

Da das vollständige Integral der (1) entsprechenden homogenen Gleichung eine in x ganze transzendente Funktion ist, so kann kein Integral der vollständigen Gleichung (1) für einen endlichen Wert von x unendlich werden, wenn dies nicht mit $A(x)$ selbst der Fall ist, so dass $A(x)$ also jedenfalls eine rationale gebrochene Funktion sein muß.

Es sei nun $R_1(x)$ eine rationale gebrochene Lösung der Gleichung:

---

1) Mathematische Annalen, Bd. 28, p. 1—13; 1886.

$$\sum_{s=0}^{s=m} a_s \cdot f^{(n-s)}(x) = A(x),$$

dann ist sicher, weil die Koeffizienten a_s und die Parameter k und ω konstant sind:

$$R(x) = R_1(x+\omega) - kR_1(x)$$

eine rationale gebrochene Lösung von (1) und daher auch die einzig mögliche Lösung dieser Art, welche (1) besitzen kann; denn die Differenz zweier willkürlichen Lösungen von (1) ist ja immer eine in x ganze transzendente Funktion.

Nach diesen Erörterungen betrachten wir nunmehr die nicht homogene Differenzengleichung:

$$\varphi(x+\omega) = a\varphi(x) + R(x), \tag{3}$$

wo a und ω *konstant* sind, während $R(x)$ eine in x *gebrochene rationale* Funktion bedeutet, welche *nicht* auf die Form:

$$R(x) = aR_1(x) - R_1(x+\omega) \tag{4}$$

gebracht werden kann, wo $R_1(x)$ wieder eine gebrochene rationale Funktion in x bedeutet. Wir werden dann beweisen, daß die Differenzengleichung (3) keine Lösung besitzen kann, welche einer algebraischen Differentialgleichung genügt.

Zuerst bemerken wir, daß die, wie wir später sehen werden, *hinreichende* Bedingung (4) auch *notwendig* ist. Zu dem Ende setzen wir:

$$R(x) = a\,R_1(x) - R_1(x+\omega),$$

dann ist offenbar die rationale Funktion:

$$\varphi(x) = -R_1(x)$$

eine Lösung der entsprechenden Gleichung (3), und man hat eben für diese Lösung eine algebraische Differentialgleichung.

Den Beweis des oben genannten allgemeinen Satzes führen wir indirekt; wir denken uns also, daß $\varphi(x)$ eine Lösung von (3) sei, welche der algebraischen Differentialgleichung:

$$F_m(x, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n) = 0 \tag{5}$$

genügt, wo der Kürze halber:

$$\varphi_n = \varphi^{(n)}(x), \quad \varphi_0 = \varphi(x) \tag{6}$$

zu setzen ist, während wir später die ähnlichen Bezeichnungen:

(7) $$\varphi_n' = \varphi^{(n)}(x + \omega), \quad \varphi_0' = \varphi(x + \omega)$$

einführen wollen.

Die Differentialgleichung (5) soll eine *algebraische* sein; damit meinen wir, daß sie auf die Form:

(8) $$F_m \equiv \mathfrak{Q}_m + \mathfrak{Q}_{m-1} + \cdots + \mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_0 = 0$$

gebracht werden kann, wo $\mathfrak{Q}_s$ homogen von der s^{ten} Dimension in

(9) $$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$$

sein soll. Bezeichnet S die Anzahl der überhaupt möglichen Lösungen der unbestimmten Gleichung:

(10) $$r_{0,s} + r_{1,s} + r_{2,s} + \cdots + r_{n,s} = s,$$

wo die $r_{q,s}$ ganze und nicht negative Zahlen bedeuten, so ist demnach:

(11) $$\mathfrak{Q}_s = \sum_{q=1}^{q=S} A_q(x) \varphi_0^{r_{0,s}} \varphi_1^{r_{1,s}} \cdots \varphi_n^{r_{n,s}},$$

wo die Koeffizienten $A_q(x)$ rationale, ganze oder gebrochene, Funktionen in x bedeuten, von welchen aber natürlich einige konstant oder gar Null sein können.

In $\mathfrak{Q}_m$ denken wir uns jedoch immer, daß einer der Koeffizienten gleich 1 ist, was ja offenbar erreicht werden kann, ohne die Allgemeinheit der Gleichung (5) zu beschränken; wir setzen also:

(12) $$\mathfrak{Q}_m = \varphi_0^{r_{0,m}} \varphi_1^{r_{1,m}} \cdots \varphi_n^{r_{n,m}} + \sum_{q=2}^{q=N} A_q(x) \varphi_0^{r_{0,m}} \varphi_1^{r_{1,m}} \cdots \varphi_n^{r_{n,m}}.$$

§ 42. Unmöglichkeit der hypothetischen Gleichung $F_m = 0$.

Wir gehen also von der im vorhergehenden Paragraphen definierten hypothetischen Differentialgleichung:

(1) $$F_m(x, \varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n) = 0$$

aus und setzen darin überall $x + \omega$ für x, dann ergibt sich aus den Definitionen § 41, (7) die neue Gleichung:

(2) $$F_m(x + \omega, \varphi_0', \varphi_1', \cdots, \varphi_n') = 0.$$

Betrachten wir aber das Glied der m^{ten} Dimension

$$P_m(x) = A(x) \varphi_0^{\alpha_0} \varphi_1^{\alpha_1} \cdots \varphi_n^{\alpha_n}, \quad \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = m,$$

so erhält man offenbar vermöge der Differenzengleichung § 41, (3):

$$P_m(x+\omega) = A(x+\omega)\left(a\varphi(x)+R(x)\right)^{\alpha_0}\left(a\varphi^{(1)}(x)+R^{(1)}(x)\right)^{\alpha_1}\cdots$$
$$\cdot\left(a\varphi^{(n)}(x)+R^{(n)}(x)\right)^{\alpha_n}.$$

und daraus:

$$(3)\quad P_m(x)-a^{-m}P_m(x+\omega)=\left(A(x)-A(x+\omega)\right)\varphi_0^{\alpha_0}\varphi_1^{\alpha_1}\cdots\varphi_n^{\alpha_n}+\cdots,$$

wo die übrigen Glieder rechter Hand sämtlich von einer niedrigeren Dimension in $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n$ als der m^{ten} sein müssen, deren Koeffizienten aber sämtlich in x *rationale* Funktionen sind.

Da nun die *rationale* Funktion $A(x)$, wenn sie keine Konstante ist, unmöglich die additive Periode ω haben kann, so leuchtet ein, daß das Glied m^{ter} Dimension rechter Hand in (3) dann und nur dann ausfallen kann, wenn der entsprechende Koeffizient $A(x)$ eine Konstante ist; das erste Glied in Ω_m mit der Bezeichnung § 41, (12) kann daher, wenn es der Transformation (3) unterworfen wird, sicher kein Glied der m^{ten} Dimension liefern; die neue Gleichung:

$$(4)\quad F_m(x, \varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n) - a^{-m}\cdot F_m(x+\omega, \varphi_0', \varphi_1', \cdots, \varphi_n') = 0,$$

welche offenbar von derselben Form wie (1) selbst ist, muß daher mindestens ein Glied der m^{ten} Dimension weniger enthalten als $F_m = 0$.

Wir verschaffen nun in (4) einem Gliede der m^{ten} Dimension den Koeffizient 1 und wenden dieselbe Methode wie vorher an; auf diese Weise fahren wir fort, bis wir eine Gleichung erhalten, in welcher die Glieder der m^{ten} Dimension sämtlich *konstante* Koeffizienten haben. Eine nochmalige Anwendung derselben Methode liefert dann sicher für $\varphi(x)$ eine algebraische Differentialgleichung $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades:

$$(5)\qquad F_{m-1}(x, \varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n) = 0.$$

Es kommt aber noch darauf an zu beweisen, daß (5) keine *formale* Identität sein kann.

Zu diesem Zwecke betrachten wir das Glied:

$$(6)\qquad P_m(x) = A\cdot\varphi_0^{\alpha_0}\varphi_1^{\alpha_1}\cdots\varphi_n^{\alpha_n},\qquad \alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_n = m,$$

wo also A eine Konstante bedeutet, und finden:

$$(7)\quad \begin{cases} P_m(x) - a^{-m}P_m(x+\omega) = \\ = \dfrac{A}{a}\cdot\displaystyle\sum_{s=0}^{s=n}\alpha_s\cdot R^{(s)}(x)\cdot\varphi_0^{\alpha_0}\cdots\varphi_{s-1}^{\alpha_{s-1}}\varphi_s^{\alpha_s-1}\varphi_{s+1}^{\alpha_{s+1}}\cdots\varphi_n^{\alpha_n}+\cdots \end{cases}$$

wo die übrigen Glieder rechter Hand sämtlich von einer niedrigeren Dimension als der $(m-1)^{\text{ten}}$ sein müssen.

Nimmt man nun aus den möglichen Gliedern von der Form (6) diejenigen, welche durch die Transformation (7) das bestimmte Produkt:

$$\varphi_0^{\alpha_0}\varphi_1^{\alpha_1}\cdots\varphi_{s-1}^{\alpha_{s-1}+1}\varphi_s^{\alpha_s-1}\varphi_{s+1}^{\alpha_{s+1}}\cdots\varphi_n^{\alpha_n} \tag{8}$$

liefern können, so müssen diese Glieder offenbar aus (6) hervorgehen, indem man dort α_p durch α_p+1 und α_s durch α_s-1 ersetzt, wobei p von s verschieden sein muß. Der vollständige Koeffizient des Gliedes (8), welcher aus Gliedern der m^{ten} Dimension hervorgehen kann, wird daher:

$$\sum_{s=0}^{s=n} k_s R^{(n-s)}(x), \tag{9}$$

wo die k_s Konstanten sind.

Aus den Gliedern $(m-1)^{\text{ter}}$ Dimension in unserer letzten Gleichung $F_m=0$ kann das bestimmte Glied (8) durch die Transformation (4) nur mit dem Koeffizienten:

$$A(x)-a^{-1}A(x+\omega) \tag{10}$$

hervorgehen, wo $A(x)$ eine *rationale* Funktion bedeutet, welche von $R(x)$ explizite unabhängig ist.

Nun kann aber nach dem oben bewiesenen Hilfssatze die Summe der Ausdrücke (9) und (10) unmöglich gleich Null werden, und damit ist also nachgewiesen, daß die neue Gleichung $F_{m-1}=0$ keine *formale* Identität sein kann.

Diese neue Gleichung $F_{m-1}=0$ wird nun durch dieselbe Methode wie vorher reduziert, und so fährt man fort, bis man eine Gleichung von der Form:

$$\sum_{s=0}^{s=n} c_s\cdot\varphi^{(n-s)}(x)=A(x) \tag{11}$$

erreicht hat, wo die c_s sämtlich konstant sind, $A(x)$ aber eine in x rationale Funktion bedeutet.

Aus (11) findet man aber durch eine letzte Anwendung unserer Methode, daß:

$$\sum_{s=0}^{s=n} c_s\cdot R^{(n-s)}(x)=A(x+\omega)-a\cdot A(x)$$

sein muß; dies ist aber wieder unmöglich, und somit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Es seien a und ω zwei Konstanten, während $R(x)$ eine in x rationale gebrochene Funktion bedeutet, welche nicht auf die Form:

$$R(x) = aR_1(x) - R_1(x + \omega) \tag{12}$$

gebracht werden kann, wo $R_1(x)$ wieder eine rationale Funktion bedeutet; dann kann die lineare Differenzengleichung:

$$\varphi(x + \omega) = a\varphi(x) + R(x) \tag{13}$$

keine Lösung besitzen, welche zugleich einer algebraischen Differentialgleichung Genüge leistet; die Bedingung (12) *ist sowohl notwendig als hinreichend.*

Es ist offenbar, daß die derivierten Funktionen von $\varphi(x)$ sämtlich dieselbe Eigenschaft wie $\varphi(x)$ besitzen müssen; keine von ihnen kann einer algebraischen Differentialgleichung Genüge leisten.

§ 43. Über die Funktionen $\int \varphi(x)\,dx$ und $e^{\int \varphi(x)\,dx}$.

Um die eben dargelegten Eigenschaften der Funktion $\varphi(x)$ mit Erfolg auf $\Gamma(x)$ und verwandte Funktionen anwenden zu können, haben wir noch die folgenden zwei Eigenschaften von $\varphi(x)$ zu beweisen:

1) *Wenn die Funktion $\varphi(x)$ und ihre Derivierten algebraische Differentialgleichungen nicht befriedigen können, so hat die Funktion:*

$$\Phi(x) = \int \varphi(x)\,dx \tag{1}$$

dieselbe Eigenschaft.

Wäre nämlich eine solche Differentialgleichung möglich, so müßte dieselbe die Funktion $\Phi(x)$ selbst explizite enthalten und könnte demzufolge auf die Form gebracht werden:

$$\Phi^m(x) + \sum_{s=1}^{s=m} A_s(x)\,\Phi^{m-s}(x) = 0, \tag{2}$$

wo die Koeffizienten $A_s(x)$ in x selbst und in $\varphi(x), \varphi^{(1)}(x), \cdots, \varphi^{(n)}(x)$ rationale Funktionen bedeuten, denn es ist ja wegen (1):

$$\Phi^{(p)}(x) = \varphi^{(p-1)}(x), \quad p \geqq 1. \tag{3}$$

Differentiert man aber die Gleichung (2) nach x, so ergibt sich wegen (3):

$$(4) \qquad \sum_{s=0}^{s=m-1}\left[\frac{dA_{s+1}}{dx} + (m-s)A_s \cdot \varphi(x)\right] \cdot \Phi^{m-s-1}(x) = 0, \quad A_0 = 1,$$

welche Gleichung ja offenbar keine *formale* Identität sein kann, weil die $(m-1)^{\text{te}}$ Potenz von $\Phi(x)$ nicht wegfallen kann. Die Gleichung (4) kann daher auf dieselbe Form wie (2) gebracht und ihr Grad in $\Phi(x)$ in ähnlicher Weise erniedrigt werden; unsere Methode führt uns daher zuletzt auf eine Gleichung von der Form:

$$(5) \qquad \Phi(x) = \frac{a_0 + a_1\varphi + \cdots + a_{n-1}\varphi^{n-1}}{b_0 + b_1\varphi + \cdots + b_n\varphi^n} + c_0 + c_1\varphi + \cdots + c_r\varphi^r$$

oder auch:

$$(6) \qquad \Phi(x) = c_0 + c_1\varphi + \cdots + c_r\varphi^r,$$

wo die Koeffizienten a, b, c in $x, \varphi^{(1)}(x), \varphi^{(2)}(x), \cdots$ rationale Funktionen sind.

Eine Differentiation nach x zeigt aber direkt, daß die Gleichung (6) nicht möglich sein kann; was die Gleichung (5) betrifft, so schreiben wir sie in der Form:

$$(7) \qquad \Phi(x) = \frac{P}{Q} + R$$

und bezeichnen durch einen Strich die nach x genommenen Ableitungen, dann folgt aus (7):

$$(8) \qquad Q^2(\varphi - R') = P'Q - PQ';$$

ordnet man aber die beiden Seiten von (8) nach φ, so leuchtet ein, daß diese Gleichung keine *formale* Identität sein kann; daher ist (7) und somit auch (2) unmöglich.

2) *Es sei $\varphi(x)$ dieselbe Funktion wie vorher, dann kann auch die andere Funktion:*

$$(9) \qquad \Omega(x) = e^{\int\varphi(x)\,dx}$$

keiner algebraischen Differentialgleichung genügen.

Denkt man sich nämlich, daß eine solche Gleichung möglich wäre, so könnte sie vermöge (9) und § 16, (5), (6) immer auf die Form:

$$(10) \qquad \Omega^m(x) + \sum_{s=1}^{s=m} A_s\Omega^{m-s}(x) = 0$$

gebracht werden, wo die Koeffizienten A_s sämtlich in

$$x,\ \varphi(x),\ \varphi^{(1)}(x),\ \cdots,\ \varphi^{(n)}(x)$$

rationale Funktionen bedeuten.

Die Identität:

$$\Omega^{(1)}(x) = \Omega(x) \cdot \varphi(x) \tag{11}$$

zeigt aber, wenn wir (10) differentiieren, daß auch:

$$m\Omega^m(x)\varphi(x) + \sum_{s=1}^{s=m} \left[(m-s)A_s \cdot \varphi(x) + \frac{dA_s}{dx}\right]\Omega^{m-s}(x) = 0 \tag{12}$$

sein muß; eliminiert man nunmehr aus (10) und (12) die Potenz $\Omega^m(x)$, so erhält man die neue Gleichung:

$$\sum_{s=1}^{s=m} \left(\frac{dA_s}{dx} - sA_s \cdot \varphi(x)\right) \cdot \Omega^{m-s}(x) = 0, \tag{13}$$

welche ebenfalls keine *formale* Identität sein kann; denn setzt man der Kürze halber:

$$A_s = \frac{a_0 + a_1\varphi + \cdots + a_p\varphi^p}{b_0 + b_1\varphi + \cdots + b_n\varphi^n} = \frac{P}{Q},$$

so wird:

$$\frac{dA_s}{dx} - sA_s\varphi = \frac{QP' - PQ' - sPQ\varphi}{Q^2},$$

und hier kann der Zähler offenbar nicht identisch verschwinden; die Unmöglichkeit der Gleichung (10) erweist sich dann durch eine Anwendung der gewöhnlichen Methode.

§ 44. Anwendungen auf die vorhergehenden Funktionen.

Als eine Anwendung der drei vorhergehenden Sätze wollen wir nunmehr den folgenden speziellen Satz beweisen:

Keine der sechs Funktionen:

$$\Psi(x),\ \Gamma(x),\ \nu(x),\ \mu(x),\ \beta(x),\ B\left(\frac{x}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

kann einer algebraischen Differentialgleichung Genüge leisten.

Daß $\Psi(x)$ diese Eigenschaft besitzt, ist einleuchtend, denn man hat:

$$\Psi(x+1) = \Psi(x) + \frac{1}{x},$$

und damit ist zugleich $\Gamma(x)$ abgetan; dies ist der eigentliche Satz von Hölder.

Gehen wir weiter von der Identität:

$$\nu(x) = \log x - \Psi(x)$$

aus, so ergibt sich:

$$\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{x} - \Psi^{(1)}(x),$$

womit die obengenannte Eigenschaft für $\nu(x)$ und daher auch für $\mu(x)$ erwiesen ist; denn aus der Definition:

$$\mu(x) = \log \Gamma(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) \log x + x - \log \sqrt{2\pi}$$

fließt die weitere Identität:

$$\mu^{(1)}(x) = \frac{1}{2x} - \nu(x).$$

Was die beiden letzten Funktionen $\beta(x)$ und $B\left(\frac{x}{2}, \frac{1}{2}\right)$ betrifft, so hat man:

$$\beta(x+1) = -\beta(x) + \frac{1}{x}$$

und:

$$D_x \log B\left(\frac{x}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\beta(x);$$

damit ist aber unser Satz vollkommen bewiesen.

Stadigh[1]) hat bemerkt, daß auch die Funktion:

$$\varphi(x) = \Psi\left(\frac{x}{2}\right) + \Psi\left(\frac{1-x}{2}\right)$$

die obige Eigenschaft besitzt. Dies ist auch eine unmittelbare Folge unseres ersten allgemeineren Satzes; es ist nämlich nach einer einfachen Reduktion:

$$\varphi(x+2) = \varphi(x) + \frac{2}{x} + \frac{2}{x-1}.$$

Es ist übrigens offenbar, daß der Satz von Stadigh beträchtlich verallgemeinert werden kann. Zu dem Ende bezeichnen wir mit a_r und α_r willkürliche Konstanten, während die p_r *rationale* Zahlen sind; dann kann keine der Funktionen:

$$\sum_{r=1}^{r=n} a_r \Psi(p_r x + \alpha_r),$$

$$\prod_{r=1}^{r=n} (\Gamma(p_r x + \alpha_r))^{a_r}$$

einer algebraischen Differentialgleichung Genüge leisten, vorausgesetzt, daß die Argumente $(p_r x + \alpha_r)$ nicht paarweise geordnet

1) Dissertation, p. 32; Helsingfors 1902.

werden können, so daß die Differenz je zweier solcher Argumente eine ganze Zahl ist, während die entsprechende a_r die Summe Null hat.

Als Beispiele können die Funktionen $B(x, y)$ und $P(x, y)$, als Funktionen von x betrachtet, dienen; da die nach x genommene Ableitung von $\Theta(x, y)$ keiner algebraischen Differentialgleichung genügen kann, so ist dies mit der Funktion $\Theta(x, y)$ selbst der Fall, wenn wir Θ als Funktion von x betrachten.

ZWEITER TEIL

BESTIMMTE INTEGRALE



Kapitel IX.

Über die Integralgattung $\mathfrak{B}(x)$.

§ 45. Fundamentaleigenschaften des Integrals $\mathfrak{B}(x)$.

Wir wollen unsere Darstellung der bestimmten Integrale, welche in der Theorie der Gammafunktion auftreten, mit einer kurzen Untersuchung über eine Integralgattung einleiten, welche in verschiedenen Problemen eine wichtige Rolle spielt und die Mehrzahl der in der Theorie der Gammafunktion auftretenden Funktionen als Spezialfälle enthält.

Zu dem Ende setzen wir:

$$t^{\omega} = e^{\omega \log t}, \tag{1}$$

wo t positiv ist, und wo $\log t$ als *reell* anzusehen ist; weiter sei nun $\varphi(t)$ eine solche Funktion der positiven Veränderlichen t, daß das bestimmte geradlinige Integral:

$$\mathfrak{B}_{\sigma}(x) = \int_{\sigma}^{1} \varphi(t) t^{x-1} dt \tag{2}$$

mit der Definition (1) für jeden endlichen Wert von $|x|$ konvergiert, wenn σ eine positive Größe bedeutet, welche von beliebiger Kleinheit, aber doch angebbar ist; endlich soll es möglich sein, eine solche positive Zahl δ zu bestimmen, daß das supplementäre Integral:

$$R_{\sigma}(x) = \int_{0}^{\sigma} \varphi(t) t^{x-1} dt \tag{3}$$

der Bedingung:

$$\left| R_{\sigma}(x) \right| \begin{matrix} < \varepsilon \\ > \frac{1}{\varepsilon} \end{matrix} \tag{4}$$

Genüge leistet, je nachdem $\mathfrak{R}(x) \gtrless 0$ ist, vorausgesetzt daß $\sigma \leqq \delta$ angenommen wird, und ε eine vorgegebene positive Größe von beliebiger Kleinheit bedeutet.

Unter diesen Voraussetzungen wollen wir nunmehr den folgenden Satz beweisen:

Das bestimmte geradlinige Integral:

$$\mathfrak{B}(x) = \int_0^1 \varphi(t) t^{x-1} dt \tag{5}$$

ist in jedem endlichen Punkte der durch die Ungleichung $\Re(x) > 0$ *bestimmten Halbebene gleichmäßig konvergent, und die Funktion* $\mathfrak{B}(x)$ *ist in dem so bestimmten Bereiche* $\mathfrak{P}$ *eine in* x *analytische Funktion.*

Man hat nämlich wegen (2) und (3):

$$\mathfrak{B}(x) = \mathfrak{B}_\sigma(x) + R_\sigma(x); \tag{6}$$

es sei nun weiter x eine in $\mathfrak{P}$ abgebildete Zahl, während y eine endliche Zahl bedeutet, so daß $\Re(y) \geqq 0$ ist, dann ist wegen (2) und (4) auch das Integral $\mathfrak{B}(x+y)$ konvergent. Ist umgekehrt x eine außer dem Bereiche $\mathfrak{P}$ abgebildete Zahl, während $\Re(y) \leqq 0$ vorausgesetzt wird, so konvergiert das Integral $\mathfrak{B}_\sigma(x+y)$ sicher, während $R_\sigma(x+y)$ keinen Sinn hat, und somit ist der erste Teil unseres Satzes bewiesen.

Was die analytische Natur von $\mathfrak{B}(x)$ betrifft, so hat man folgende drei Bedingungen zu untersuchen:

1) *Die Eindeutigkeit von* $\mathfrak{B}(x)$ *in* $\mathfrak{P}$; diese Eigenschaft ist eine unmittelbare Folge der beiden Definitionen (1) und (5).

2) *Die Stetigkeit von* $\mathfrak{B}(x)$ *in* $\mathfrak{P}$; bezeichnen x und $x+h$ zwei in $\mathfrak{P}$ abgebildete Zahlen, so ist für $t \geqq \sigma$ wegen (1):

$$t^{x+h-1} = t^{x-1}(1 + h \log t \cdot K),$$

wo K endlich bleibt, wie klein auch $|h|$ angenommen wird, und der Grenze 1 zustrebt, wenn $|h|$ verschwindet; daher ist:

$$\mathfrak{B}_\sigma(x+h) - \mathfrak{B}_\sigma(x) = h \cdot \int_\sigma^1 K \varphi(t) t^{x-1} \log t \, dt; \tag{7}$$

weiter ist es nach (4) möglich, δ so klein zu wählen, daß:

$$|R_\sigma(x+h)| < \varepsilon \cdot |h|, \quad |R_\sigma(x)| < \varepsilon \cdot |h| \tag{8}$$

wird, wo ε eine vorgegebene positive Größe von beliebiger Kleinheit bedeutet, falls nur $\sigma \leqq \delta$ angenommen wird.

Es ist demnach möglich, $|h|$ so klein zu wählen, daß:

$$|\mathfrak{B}(x+h) - \mathfrak{B}(x)|$$

beliebig klein angenommen werden darf, und somit ist die Stetigkeit von $\mathfrak{B}(x)$ im Bereiche $\mathfrak{P}$ nachgewiesen.

3) *Die Derivierte* $\mathfrak{B}^{(1)}(x)$; aus (7) und (8) folgt unmittelbar, daß der Grenzwert:

$$\lim_{|h|=0}\left(\frac{\mathfrak{B}(x+h)-\mathfrak{B}(x)}{h}\right)=\mathfrak{B}^{(1)}(x)$$

endlich und bestimmt und unabhängig von h wird, falls nur x und $x+h$ beide im Bereiche $\mathfrak{P}$ liegen; man findet aus (7) und (8):

$$\mathfrak{B}^{(1)}(x)=\int_0^1 \varphi(t)\log t\cdot t^{x-1}dt. \tag{9}$$

Setzt man in (5):

$$e^{-z}=t,\quad \varphi(e^{-z})=f(z), \tag{10}$$

so erhält man für $\mathfrak{B}(x)$ das folgende geradlinige Integral:

$$\mathfrak{B}(x)=\int_0^\infty f(z)e^{-zx}dz, \tag{11}$$

und es ist dann zu beachten, daß die Derivierten von $\varphi(t)$ und $f(z)$, falls solche Funktionen existieren, durch die Formeln § 27, (1), (2) verbunden sein müssen; aus (11) findet man die beiden weiteren Integraldarstellungen:

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{B}(x+iy)+\mathfrak{B}(x-iy))=\int_0^\infty e^{-zx}f(z)\cos(zy)dz, \tag{12}$$

$$\frac{1}{2i}(\mathfrak{B}(x+iy)-\mathfrak{B}(x-iy))=\int_0^\infty e^{-zx}f(z)\sin(zy)dz, \tag{13}$$

wo also die zwei Zahlen $x\pm iy$ beide im Bereiche $\mathfrak{P}$ liegen müssen.

Es leuchtet ein, daß die eben hergeleiteten Eigenschaften der Integralgattung $\mathfrak{B}(x)$ auch noch in den folgenden beiden Fällen richtig bleiben:

1) Ist die Bedingung (4) für $\mathfrak{R}(x)\gtrless\omega$ befriedigt, so setzt man:

$$\mathfrak{B}(x)=\mathfrak{B}_1(x+\omega)=\int_0^1\varphi(t)t^{\omega}\cdot t^{x-1}dt. \tag{14}$$

2) Das Integral (2) ist zwar divergent, das folgende:

$$\int_\sigma^1(\varphi(t)t^{x-1}-f(t))dt$$

ist aber konvergent, während $f(t)$ der Bedingung:

$$\left|\int_0^\sigma f(t)dt\right|<\varepsilon$$

Genüge leistet, falls $\sigma\leq\delta$;

das Integral:

$$(15)\qquad \mathfrak{U}(x) = \int_0^1 (\varphi(t) t^{x-1} - f(t)) dt$$

hat dann dieselben Eigenschaften wie $\mathfrak{B}(x)$.

Wir erwähnen noch den folgenden Spezialfall eines allgemeinen Satzes von Lerch[1]):

Die analytische Funktion $\mathfrak{B}(x)$ kann in der durch die Ungleichung $\Re(x) > 0$ bestimmten Halbebene nicht unendlich viele Nullstellen besitzen, welche eine arithmetische Reihe bilden, außer wenn $\varphi(t)$ identisch verschwindet. Die Integralgattung $\mathfrak{B}(x)$ erlaubt somit keine Nulldarstellung.

Wir können indessen hier den Beweis dieses Satzes nicht wiedergeben, sondern müssen auf die Abhandlungen von Lerch selbst hinweisen.

§ 46. Integraldarstellungen von $\mathfrak{B}(x) \pm \mathfrak{B}_1(x)$ und $\mathfrak{B}(x) \cdot \mathfrak{B}_1(x)$.

Wir betrachten nunmehr zwei Integrale der obenerwähnten Gattung, nämlich:

$$(1)\qquad \mathfrak{B}(x) = \int_0^1 \varphi(t) t^{x-1} dt,$$

$$(2)\qquad \mathfrak{B}_1(x) = \int_0^1 \psi(t) t^{x-1} dt;$$

aus ihnen ergibt sich unmittelbar das neue Integral derselben Gattung:

$$(3)\qquad \mathfrak{B}(x) \pm \mathfrak{B}_1(x) = \int_0^1 (\varphi(t) \pm \psi(t)) t^{x-1} dt.$$

Um auch das Produkt $\mathfrak{B}(x) \cdot \mathfrak{B}_1(x)$ zu untersuchen, setzen wir in (2) $z:t$ statt t und erhalten so:

$$(4)\qquad \mathfrak{B}_1(x) = \int_0^t \psi\left(\frac{z}{t}\right) \left(\frac{z}{t}\right)^{x-1} \frac{dz}{t},$$

wo t eine positive und bestimmte Größe bezeichnen muß; setzen wir aber ferner:

$$(5)\qquad \mathfrak{B}(x) = \int_t^1 \varphi(t) t^{x-1} dt + \int_0^t \varphi(t) t^{x-1} dt,$$

so darf das t in (4) mit demjenigen im ersten Integrale rechter

1) Rozpravy I Nr. 33, 1892 (böhmisch). Acta Mathematica, Bd. 27, p. 347; 1903.

Hand in (5) identisch angenommen werden; somit ergibt sich die Formel:

$$\mathfrak{B}(x) \cdot \mathfrak{B}_1(x) = \mathfrak{B}_1(x) \int_0^{\varepsilon} \varphi(t) t^{x-1} dt + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{\varphi(t)}{t} dt \left(\int_0^t \psi\left(\frac{z}{t}\right) z^{x-1} dz \right),$$

aus der unter Anwendung der Formel § 45, (4), wenn ε gegen Null konvergiert:

$$\mathfrak{B}(x) \cdot \mathfrak{B}_1(x) = \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{t} dt \cdot \left(\int_0^t \psi\left(\frac{z}{t}\right) z^{x-1} dz \right)$$

folgt; einem bekannten Satze zufolge[1]) kann man aber, wenn die Funktionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ abteilungsweise stetig sind, das so erhaltene Doppelintegral auch folgendermaßen darstellen:

$$\mathfrak{B}(x) \cdot \mathfrak{B}_1(x) = \int_0^1 z^{x-1} \left(\int_z^1 \psi\left(\frac{z}{t}\right) \frac{\varphi(t)}{t} dt \right) dz.$$

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Das Produkt zweier Integrale $\mathfrak{B}(x)$ und $\mathfrak{B}_1(x)$ läßt sich, wenn die Funktionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ abteilungsweise stetig sind, immer als Integral derselben Gattung:

$$\mathfrak{B}(x) \cdot \mathfrak{B}_1(x) = \int_0^1 \chi(t) t^{x-1} dt \tag{6}$$

darstellen, wo der Kürze halber:

$$\chi(t) = \int_t^1 \frac{\varphi(z)}{z} \cdot \psi\left(\frac{t}{z}\right) dz \tag{7}$$

gesetzt worden ist.

Die Funktion $\chi(t)$ muß offenbar in φ und ψ symmetrisch sein; setzt man aber in (7) $z = t : u$, so folgt:

$$\chi(t) = \int_t^1 \frac{\psi(u)}{u} \cdot \varphi\left(\frac{t}{u}\right) du,$$

woraus die Symmetrie deutlich hervorgeht.

Unsere Integralgattung $\mathfrak{B}(x)$ bildet also für die Addition, Subtraktion und Multiplikation eine in sich geschlossene Gruppe.

---

1) Stolz, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung, Bd. III; Leipzig 1899, Teubner.

Will man die Darstellung § 45, (11) anwenden, so findet man aus (7), indem e^{-t} statt t und e^{-z} statt z eingeführt werden:

$$h(t) = \int_0^t f(z) g(1-z) dz, \tag{8}$$

wo der Kürze halber:

$$f(t) = \varphi(e^{-t}), \quad g(t) = \psi(e^{-t}), \quad h(t) = \chi(e^{-t}) \tag{9}$$

gesetzt worden ist.

§ 47. Die Fundamentaloperationen der Analysis.

Für die durch das Integral:

$$\mathfrak{B}(x) = \int_0^1 \varphi(t) t^{x-1} dt \tag{1}$$

im Bereiche $\mathfrak{P}$ definierte analytische Funktion $\mathfrak{B}(x)$ haben wir schon in § 45, (9) die Formel:

$$\mathfrak{B}^{(1)}(x) = \int_0^1 \varphi(t) \log t \cdot t^{x-1} dt \tag{2}$$

entwickelt; somit bildet unsere Integralgattung $\mathfrak{B}(x)$ auch für die *Differentiation* eine in sich geschlossene Funktionengruppe. Dies ist aber im allgemeinen für die *Integration* nicht mehr der Fall, denn wir können leicht den folgenden Satz beweisen:

Sind a und x zwei im Bereiche $\mathfrak{P}$ abgebildete Zahlen, so kann man einen solchen Integrationsweg einschlagen, daß:

$$\int_a^x \mathfrak{B}(x) dx = \int_0^1 \frac{\psi(t)(t^{x-1} - t^{a-1})}{\log t} dt \tag{3}$$

ist.

Betrachtet man nämlich a als eine feste Konstante, so führt (2) unmittelbar von (3) nach (1) zurück.

Wünscht man in (3) $a = 0$ zu setzen, so lautet die notwendige und hinreichende Bedingung dafür:

$$\lim_{\delta = +0,\, \varepsilon = +0} \int_\delta^{\delta+\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t \log t} dt = 0, \tag{4}$$

und man findet in diesem Falle:

$$\int_0^x \mathfrak{B}(x) dx = \int_0^1 \frac{\varphi(t)(t^x - 1)}{t \log t} dt, \tag{5}$$

eine Formel, die auch im Bereiche $\mathfrak{P}$ anwendbar ist.

Will man noch die Funktion $\mathfrak{B}(x)$ nach x unbestimmt integrieren, so muß die Funktion $\varphi(x)$ der Bedingung:

$$\lim_{\substack{\delta=+0,\\ \varepsilon=+0}} \int\limits_{1-\delta}^{1-\delta-\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{\log t}\, dt = 0 \tag{6}$$

Genüge leisten; und man findet in diesem Falle:

$$\int \mathfrak{B}(x) dx = \int\limits_0^1 \frac{\varphi(t)}{\log t} \cdot t^{x-1} dt + K, \tag{7}$$

wo K die willkürliche Integrationskonstante bezeichnet.

Um für die Integralformel (5) ein Beispiel zu geben, benutzen wir die Identität:

$$\frac{1}{x} = \int\limits_0^1 t^{x-1} dt, \quad \Re(x) > 0$$

und finden:

$$\log x = \int\limits_0^1 \frac{t^{x-1} - 1}{\log t} dt, \quad \Re(x) > 0; \tag{8}$$

diese Formel kann dazu dienen, das unbestimmte Integral von $\mathfrak{B}(x)$ in demjenigen Falle darzustellen, wo $\varphi(1) = \varphi(1-0)$ einen endlichen und nicht oszillierenden Wert hat; man findet nämlich dann zunächst:

$$\int \mathfrak{B}(x) dx = K + \varphi(1) \log x + \int\limits_0^1 \frac{\varphi(t) - \varphi(1)}{\log t} t^{x-1} dt, \quad \Re(x) > 0; \tag{9}$$

denn eine Differentiation nach x führt unmittelbar von (9) auf (1) zurück; aus (8) und (9) aber findet man ohne Mühe den Satz:

Ist $\varphi(1) = \varphi(1-0)$ eine endliche und nicht oszillierende Größe, so ist im Bereiche $\mathfrak{P}$:

$$\int \mathfrak{B}(x) dx = K + \int\limits_0^1 \frac{\varphi(t) t^{x-1} - \varphi(1)}{\log t} dt. \tag{10}$$

Will man die Darstellung § 45, (11) des Integrals $\mathfrak{B}(x)$ benutzen, so findet man gemäß (2) und (3):

$$\mathfrak{B}^{(1)}(x) = -\int\limits_0^\infty f(t) t e^{-tx} dt, \tag{11}$$

$$\int\limits_a^x \mathfrak{B}(x)\, dx = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-ta} - e^{-tx}}{t} \cdot f(t) dt, \tag{12}$$

aus (4) und (5) aber:

$$\int_0^x \mathfrak{B}(x)\,dx = \int_0^\infty \frac{1-e^{-tx}}{t}\cdot f(t)\,dt, \tag{13}$$

wo man also:

$$\lim_{\substack{D=+\infty\\ E=+\infty}} \int_D^{D+E} \frac{f(t)}{t}\,dt = 0 \tag{14}$$

voraussetzen muß, während (7) unter der Bedingung:

$$\lim_{\substack{\delta=+0,\\ \varepsilon=+0}} \int_\delta^{\delta+\varepsilon} \frac{f(t)}{t}\,dt = 0 \tag{15}$$

die analoge Formel:

$$\int \mathfrak{B}(x)\,dx = K - \int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\cdot e^{-tx}\,dt \tag{16}$$

liefert; endlich findet man aus (10) die weitere Darstellung:

$$\int \mathfrak{B}(x)\,dx = K + \int_0^\infty \frac{f(0)e^{-t} - f(t)e^{-tx}}{t}\,dt, \tag{17}$$

wo man also voraussetzen muß, daß $f(+0)$ eine endliche und nicht oszillierende Größe ist.

§ 48. Die Fundamentaloperationen der Differenzenrechnung.

Es ist sehr bemerkenswert, daß uns die Fundamentaloperationen der Differenzenrechnung, d. h. die Operationen:

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$$
$$\Delta^{-1} f(x) = g(x), \quad \text{wenn} \quad \Delta g(x) = f(x) \text{ ist,}$$

auf das Integral $\mathfrak{B}(x)$ angewendet, zu ähnlichen Resultaten führen wie die Fundamentaloperationen der Analysis, was für analytische Funktionen im allgemeinen nicht der Fall ist.

Erstens findet man ohne Mühe die Formel:

$$\Delta \mathfrak{B}(x) = \int_0^1 \varphi(t)(t-1)t^{x-1}\,dt, \tag{1}$$

die im ganzen Konvergenzbereiche $\mathfrak{P}$ anwendbar ist, und aus ihr leicht die umgekehrte Formel:

$$\Delta^{-1}\mathfrak{B}(x) = \int_0^1 \varphi(t)\cdot\frac{1-t^{x-1}}{1-t}\,dt + J(x), \tag{2}$$

wo $J(x)$ der Periodizitätsbedingung $J(x+1) = J(x)$ Genüge leistet, sonst aber ganz willkürlich angenommen werden darf.

Wenn die Bedingung § 47, (6) erfüllt ist, so läßt sich die Formel (2) einfacher folgendermaßen darstellen:

$$\Delta^{-1}\mathfrak{B}(x) = \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{t-1} \cdot t^{x-1} dt + J(x) \tag{3}$$

oder, was offenbar dasselbe ist:

$$\Delta^{-1}\mathfrak{B}(x) = -\sum_{s=0}^{s=\infty} \mathfrak{B}(x+s) + J(x); \tag{4}$$

denn die Definition von $\mathfrak{B}(x)$ ergibt unmittelbar die Identität:

$$\sum_{s=0}^{s=n} \mathfrak{B}(x+s) = \int_0^1 \frac{1-t^n}{1-t} \varphi(t) \cdot t^{x-1} dt,$$

aus der wegen (3):

$$\Delta^{-1}\mathfrak{B}(x) + \sum_{s=0}^{s=n} \mathfrak{B}(x+s) = -\int_0^1 \frac{t^n \varphi(t)}{1-t} \cdot t^{x-1} dt \tag{5}$$

folgt; somit ist es möglich, eine positive ganze Zahl N so zu bestimmen, daß der absolute Wert des Integrals rechter Hand in (5) kleiner als ε wird, wo ε eine vorgegebene positive Größe von beliebiger Kleinheit bedeutet, wenn nur $n > N$ vorausgesetzt wird; damit ist aber die Formel (4) bewiesen.

Wenn die Formeln (3) und (4) einen Sinn haben, nennen wir die Funktion $\mathfrak{B}(x)$ *summierbar*.

Aus der Identität:

$$\frac{1}{x} = \int_0^1 t^{x-1} dt, \quad \mathfrak{R}(x) > 0$$

findet man vermöge der Definition § 5, (2) von $\Psi(x)$, daß:

$$\Psi(x) = \int_0^1 \frac{1-t^{x-1}}{1-t} \cdot dt + J(x), \quad \mathfrak{R}(x) > 0 \tag{6}$$

sein muß; somit ist $\Psi(x)$ als der Logarithmus der Differenzenrechnung anzusehen.

In dem Falle, wo $\varphi(1) = \varphi(1-0)$ eine endliche, nicht oszillierende Größe ist, findet man ohne Mühe:

$$\Delta^{-1}\mathfrak{B}(x) = \varphi(1)\Psi(x) + \int_0^1 \frac{\varphi(1)-\varphi(t)}{1-t} t^{x-1} dt + J(x); \tag{7}$$

denn die Operation Δ führt von (7) auf die Definition von $\mathfrak{B}(x)$ zurück; aus (6) und (7) findet man dann die einfachere Darstellung:

$$\Delta^{-1}\mathfrak{B}(x) = \int_0^1 \frac{\varphi(1) - \varphi(t)t^{x-1}}{1-t}\,dt + J(x), \tag{8}$$

welche derjenigen im § 47, (10) ganz ähnlich ist.

Benutzt man die Integraldarstellung § 45, (11) für $\mathfrak{B}(x)$, so ergeben sich aus (1) und (2) die entsprechenden Formeln:

$$\Delta\mathfrak{B}(x) = -\int_0^\infty f(t)(1-e^{-t})e^{-tx}dt, \tag{9}$$

$$\Delta^{-1}\mathfrak{B}(x) = \int_0^\infty f(t)\,\frac{1-e^{-tx}}{1-e^{-t}}\,dt + J(x); \tag{10}$$

aus (3) folgt unter der Bedingung § 47, (15):

$$\Delta^{-1}\mathfrak{B}(x) = \int_0^\infty \frac{f(t)}{e^{-t}-1}\cdot e^{-tx}dt + J(x), \tag{11}$$

und die Formel (7) läßt sich folgendermaßen schreiben:

$$\Delta^{-1}\mathfrak{B}(x) = \int_0^\infty \frac{f(0)e^{-t} - f(t)e^{-tx}}{1-e^{-t}}\,dt + J(x). \tag{12}$$

§ 49. Binomialkoeffizientenentwicklung für $\mathfrak{B}(x)$.

Da das Integral $\mathfrak{B}(x)$ im Bereiche $\mathfrak{P}$ eine in x analytische Funktion ist, so kann es offenbar in der Umgebung jedes Punktes von $\mathfrak{P}$ in eine *Taylorsche* Reihe entwickelt werden; viel natürlicher für diese Funktionengattung sind indessen Entwicklungen nach Binomialkoeffizienten, die wir folgendermaßen herleiten können.

Wir betrachten die etwas allgemeinere Funktion § 45, (15):

$$\mathfrak{U}(x) = \int_0^1 (\varphi(t)t^{x-1} - f(t))dt, \tag{1}$$

wo $\Re(x) > \omega$ vorausgesetzt werden muß; nun führt aber die Binomialformel, falls $1 \geqq t > 0$ angenommen wird, auf die Entwicklung:

$$[1-(1-t)]^{x-1} = \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \binom{x-1}{s} (1-t)^s, \tag{2}$$

wo der Kürze halber:

$$(3)\qquad \binom{x-1}{0}=1,\ \binom{x-1}{s}=\frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-s)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots s}$$

gesetzt worden ist.

Die unendliche Reihe rechter Hand in (2) ist aber im Intervalle $1 \geqq t \geqq 0$ nach t gliedweise integrierbar, falls nur $\Re(x) > 0$ vorausgesetzt wird.[1]) Ist nun weiter $\Re(y) > \omega$, so ist die Funktion $\varphi(t) t^y$ in demselben Intervalle $1 \geqq t \geqq 0$ integrierbar, und ein bekannter Satz[2]) ergibt dann unmittelbar die Entwicklung:

$$(4)\qquad \mathfrak{U}(x+y)=\sum_{s=0}^{s=\infty} a_s(y)\cdot\binom{x-1}{s},$$

wo der Kürze halber:

$$(5)\qquad a_0(y)=\int_0^1 (\varphi(t)t^y - f(t))\,dt = \mathfrak{U}(y+1)$$

und allgemeiner

$$(6)\qquad a_n(y)=(-1)^n\int_0^1 \varphi(t)t^y(1-t)^n\,dt = \Delta^n\mathfrak{U}(y+1)$$

gesetzt worden ist. Damit ist der folgende Satz bewiesen:

Es sei $\Re(y) > \omega$, *dann ist die Entwicklung nach Binomialkoeffizienten:*

$$(7)\qquad \mathfrak{U}(x)=\sum_{s=0}^{s=\infty}\Delta^s\mathfrak{U}(y+1)\cdot\binom{x-y-1}{s}$$

in jedem endlichen Punkte der durch die Ungleichung $\Re(x-y) > 0$ *bestimmten Halbebene konvergent.*

Falls $\omega \leqq 0$ ist, so darf man in (7) $y=0$ annehmen, und die so erhaltene Binomialkoeffizientenreihe ist für jeden endlichen Wert von x mit positiver reeller Komponente konvergent.

Was die allgemeine Reihe betrifft, welche schon von Stirling[3]) untersucht worden ist:

$$(8)\qquad W(x)=\sum_{s=0}^{s=\infty} a_s\cdot\binom{x-1}{s},$$

wo die Koeffizienten a_s sämtlich von x unabhängig sind, so ergibt der Grenzwert § 21, (2) ohne Mühe die beiden folgenden Sätze:

---

1) U. Dini, Grundlagen für eine Theorie der Funktionen einer veränderlichen reellen Größe, p. 523; Leipzig 1892, Teubner.

2) U. Dini, loc. cit., p. 528.

3) Methodus differentialis. London 1730.

A. Der Bereich der absoluten Konvergenz der Reihe $W(x)$ ist der endliche Teil einer Halbebene, welche rechts von einer gewissen geraden, auf der Achse der reellen Zahlen senkrecht stehenden Linie liegt.

B. Wenn die Glieder der Reihe $W(x)$ für einen gewissen endlichen Wert α von x sämtlich endlich sind, so ist diese Reihe sicher unbedingt konvergent für jeden endlichen Wert von x, welcher der Bedingung $\Re(x-\alpha) > 1$ Genüge leistet.

Um die Fundamentaloperationen der Differenzenrechnung auf die Reihe (8) anzuwenden, gehen wir von der elementaren Identität:

$$\binom{x}{n} = \binom{x-1}{n} + \binom{x-1}{n-1} \tag{9}$$

aus und finden so unmittelbar die Formel:

$$\Delta W(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} a_{s+1} \cdot \binom{x-1}{s}, \tag{10}$$

welche im ganzen Konvergenzbereiche von $W(x)$ anwendbar ist. Ebenso leicht findet man die entsprechende umgekehrte Formel:

$$\Delta^{-1} W(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} a_s \binom{x-1}{s+1} + J(x), \tag{11}$$

die ebenfalls im obengenannten Bereiche anwendbar ist, und in der $J(x)$ der Periodizitätsbedingung $J(x+1) = J(x)$ Genüge leistet, sonst aber ganz willkürlich angenommen werden darf.

Die Fundamentaloperationen der Analysis führen auf viel kompliziertere Resultate.

Da das Produkt zweier Integrale $\mathfrak{B}(x)$ wieder ein Integral derselben Gattung wird, so leuchtet ein, daß das Produkt der zwei entsprechenden Binomialkoeffizientenreihen wieder in eine solche Reihe entwickelt werden kann.[1])

Für die Koeffizienten a_n der Reihe (8) wollen wir jetzt den folgenden Satz beweisen:

Konvergiert die Reihe (8) für $\Re(x) \geqq 1$, so ist allgemein

$$a_n = \Delta^n W(1). \tag{12}$$

Setzt man in (8) nacheinander $x = 1, 2, 3, 4, \cdots$, so führt die vollständige Induktion in der Tat unmittelbar zu (12).

Wir haben endlich zu bemerken, daß die Reihen von der Form

---

1) Man vergleiche meine Abhandlung in Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei vom 4. Dez. 1904.

(8) *Nullentwicklungen* gestatten; man hat bekanntlich vermöge der Binomialformel:

$$(13)\qquad 0 = (1-1)^{x-1} = \sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s\binom{x-1}{s}, \quad \Re(x) > 1;$$

über diese Nullentwicklungen im allgemeinen hat Pincherle[1]) einen interessanten Satz bewiesen.

Pincherle[2]) hat mir auch die notwendige und hinreichende Bedingung mitgeteilt, welcher eine Funktion genügen muß, um in eine Reihe von der Form (8) entwickelt werden zu können. Diese Bedingung zeigt, das die vorhergehenden Integralgattungen $\mathfrak{B}(x)$ und $\mathfrak{U}(x)$ nur *Spezialfälle* solcher Funktionen darstellen.

§ 50. Partialbruchentwicklung für $\mathfrak{B}(x)$.

Über die Reihenentwicklungen von $\mathfrak{B}(x)$ wollen wir noch den folgenden spezielleren Satz beweisen:

Es sei $\varphi(t)$ im Innern des Kreises $|t| = 1$ regulär und die zugehörige Potenzreihe:

$$(1)\qquad \varphi(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots$$

gliedweise von $t = 0$ bis $t = 1$ integrierbar, dann hat man die Entwicklung:

$$(2)\qquad \mathfrak{B}(x) = \frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2}{x+2} + \frac{a_3}{x+3} + \cdots,$$

welche in der ganzen unendlichen x-Ebene außer den einfachen Polen konvergiert. Die obengenannten Bedingungen sind sowohl hinreichend als notwendig.

Den Voraussetzungen zufolge ist die Reihe:

$$S = \frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{4} + \cdots$$

konvergent; setzt man daher

$$S_1 = \frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2}{x+2} + \frac{a_3}{x+3} + \cdots,$$

wo x weder gleich Null noch eine negative ganze Zahl sein darf, so hat man offenbar:

$$(3)\qquad S - S_1 = (x-1)\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{a_s}{(s+1)(x+s)},$$

---

1) Man vergleiche seine Abhandlung in Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei für 1902, p. 420ff.

2) In einem Briefe vom 14. April 1904.

und es bleibt uns nur noch übrig, die Konvergenz der Reihe (3) nachzuweisen.

Setzen wir zu diesem Zwecke $x = \alpha + i\beta$, wo α und β reell sind, so finden wir:

$$\frac{1}{x+s} = \frac{\alpha+s}{(\alpha+s)^2+\beta^2} - \frac{i\beta}{(\alpha+s)^2+\beta^2} = \alpha_s + i\beta_s;$$

die Zahlen α_s sind daher, für hinlänglich große s, sämtlich positiv und wachsen beständig mit s, während die Zahlen β_s sämtlich dasselbe Zeichen haben, und es ist für hinlänglich große s:

$$|\beta_{s+1}| < |\beta_s|;$$

setzt man noch:

$$a_s = a_s' + i a_s'',$$

wo a_s' und a_s'' wieder reell sind, und beachtet man, daß die Reihe S konvergent ist, so zeigt ein Lemma von Abel[1]), daß die unendliche Reihe rechter Hand in (3) in vier andere zerlegt werden kann, die sämtlich konvergieren. Die Reihe S_1 ist daher gleichfalls konvergent. Somit ist unser Satz eine unmittelbare Folge der Gesetzmäßigkeit einer gliedweisen Integration der unendlichen Reihe[2]):

$$\varphi(t) \cdot t^{x-1} = \sum_{s=0}^{s=\infty} a_s \cdot t^{x+s-1}.$$

§ 51. Anwendungen auf die Funktion $\mathfrak{P}(x) = \frac{1}{x}$.

Als Beispiel der vorhergehenden Theorie wollen wir das einfachste Integral der Gattung $\mathfrak{P}(x)$, nämlich:

$$(1) \qquad \frac{1}{x} = \int_0^1 t^{x-1}\,dt = \int_0^\infty e^{-tx}\,dt, \qquad \Re(x) > 0,$$

untersuchen.

Zunächst ergibt eine Anwendung von § 47, (3) die von Euler[3]) herrührende Formel:

$$(2) \qquad \log\left(\frac{x}{y}\right) = \int_0^1 \frac{t^{x-1} - t^{y-1}}{\log t}\,dt = \int_0^\infty \frac{e^{-ty} - e^{-tx}}{t}\,dt,$$

wo man sowohl $\Re(x) > 0$ als $\Re(y) > 0$ voraussetzen muß; aus (2) findet man dann ohne Mühe die beiden weiteren Formeln:

1) 2) U. Dini, Grundlagen, pp. 136, 523.

3) Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, Bd. 19, pp. 70, 79; (1774) 1775. Institutiones calculi integralis, Bd. IV, p. 264; 1794.

$$\log\left(\frac{x+y}{xy}\right) = \int_0^1 \frac{(1-t^x)(1-t^y)+t-1}{t \log t}\, dt, \tag{3}$$

$$\log\left(\frac{(x+y+z)z}{(x+z)(y+z)}\right) = \int_0^1 \frac{(1-t^x)(1-t^y)t^{z-1}}{\log t}\, dt, \tag{4}$$

welche uns späterhin sehr nützlich sein werden.

Setzt man in (2) $y = 1$, $x = re^{i\theta}$, wo r positiv ist, während der reelle Winkel θ der Bedingung:

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2}$$

genügen muß, so erhält man die Formeln:

$$\log r = \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-tr\cos\theta}\cos(tr\sin\theta)}{t}\, dt, \tag{5}$$

$$\theta = \int_0^\infty \frac{e^{-t\cos\theta}\sin(t\sin\theta)}{t}\, dt; \tag{6}$$

es ist bemerkenswert, daß die Funktion linker Hand in (5) von θ ganz unabhängig ist, während r aus (6) wegfällt, was man leicht einsieht, wenn man $tr = z$ einführt.

Die Formel (2) liefert für $x = 1 + e^{i\theta}$ und $y = 1$, wo θ derselben Bedingung wie vorher genügt, noch die weiteren Formeln:

$$\log\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{1-e^{-t}}{1} \cdot e^{-t\cos\theta} \cdot \cos(t\sin\theta) d\theta, \tag{7}$$

$$\frac{\theta}{2} = \int_0^\infty \frac{1-e^{-t}}{t} \cdot e^{-t\cos\theta} \cdot \sin(t\sin\theta) d\theta. \tag{8}$$

Wir kehren nunmehr zu den Formeln § 45, (12), (13) zurück und finden gemäß (1), daß:

$$\frac{x}{x^2+y^2} = \int_0^\infty e^{-tx} \cdot \cos(ty) dt, \tag{9}$$

$$\frac{y}{x^2+y^2} = \int_0^\infty e^{-tx} \cdot \sin(ty) dt \tag{10}$$

sein muß, vorausgesetzt daß $\Re(x \pm iy) > 0$ angenommen wird; die Integration nach y von 0 bis y ergibt dann:

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right) = \int_0^\infty \frac{\sin(ty)}{t} \cdot e^{-tx} dt, \tag{11}$$

$$\frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) = \int_0^\infty \frac{1 - \cos(ty)}{t} \cdot e^{-tx} dt, \tag{12}$$

wo man wiederum $\Re(x \pm iy) > 0$ und in (12) noch $\Re(x) > 0$ annehmen muß. Integriert man dagegen nach x, und zwar von 0 bis x, so ergeben sich die beiden ähnlichen Formeln:

$$\frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-tx}}{t} \cdot \cos(ty) dt, \tag{13}$$

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{y}\right) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-tx}}{t} \sin(ty) dt, \tag{14}$$

wo y als *reell* anzusehen ist, während überdies $\Re(x) > 0$ angenommen werden muß.

Setzt man speziell in (12) und (13) $x = y$, so folgt:

$$\frac{1}{2}\log 2 = \int_0^\infty \frac{1 - \cos t}{te^t} dt = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-t}}{t} \cdot \cos t\, dt, \tag{15}$$

während die Addition der beiden Formeln (11) und (14) folgende berühmte Integraldarstellung von Euler liefert:

$$\frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sgn} y = \int_0^\infty \frac{\sin(ty)}{t} dt; \tag{16}$$

denn die unendlich vieldeutigen Funktionen in den Formeln (11) bis (14) sind sämtlich so zu bestimmen, daß sie mit y verschwinden; in (16) ist *sgn* (signum) die Bezeichnung von Kronecker für das Vorzeichen der reellen Zahl y.

Eine Anwendung der allgemeinen Formel § 49, (7) ergibt endlich für $y = 0$ die spezielle Entwicklung:

$$\frac{1}{x} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{s+1} \cdot \binom{x-1}{s}, \tag{17}$$

welche für jeden endlichen Wert von x mit positiven reellen Komponenten konvergiert.

Kapitel X.

Das erste Eulersche Integral.

§ 52. Bestimmung des Integrals $\left(\frac{x}{y}\right)$.

Nach Legendre wollen wir das folgende von Euler[1]) herrührende bestimmte Integral:

$$\left(\frac{x}{y}\right) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t^a)^{\frac{y}{a}-1}\,dt, \tag{1}$$

wo $\Re(x)$, $\Re(y)$ und $\Re(a)$ sämtlich positiv sein müssen, als das *erste Eulersche Integral* bezeichnen.

Um den Wert von $\left(\frac{x}{y}\right)$ zu bestimmen, gehen wir von der für $|t| < 1$ anwendbaren Entwicklung:

$$t^{x-1}(1-t^a)^{\frac{y}{a}-1} = \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \binom{\frac{y}{a}-1}{s} \cdot t^{as+x-1} \tag{2}$$

aus; eine *formale* gliedweise Integration von $t=0$ bis $t=1$ der unendlichen Reihe rechter Hand in (2) liefert dann das Resultat:

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \binom{\frac{y}{a}-1}{s} \cdot \frac{1}{x+sa} = \frac{1}{x} \cdot F\left(1-\frac{y}{a}, \frac{x}{a}, \frac{x}{a}+1, 1\right); \tag{3}$$

nun ist aber die Reihe rechter Hand in (2) unter den vorher angegebenen Bedingungen im Intervalle $0 \leqq t < 1$ gliedweise integrierbar, und die Reihen (3) sind wegen § 22, (2) konvergent. Ein bekannter Satz ergibt daher die Formel[2]):

$$\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{x} \cdot F\left(1-\frac{y}{a}, \frac{x}{a}, \frac{x}{a}+1, 1\right), \tag{4}$$

welche schon von Euler[3]) gefunden worden ist.

---

1) Comment. Acad. Petrop., Bd. 5, p. 36—57; (1730—31) 1738. Miscellanea Taurinensia, Bd. 3, p. 156—177; (1762—65) 1766. Novi Comment. Acad. Petrop., Bd. 16, p. 91—139; (1771) 1772. Bd. 19, p. 115—154; (1774) 1775. Nova Acta Academiae Petropolitanae, Bd. 5, p. 86—129; (1787) 1789. Bd. 8, pp. 3—14, 15—31, 32—68; (1790) 1794. Institutiones calculi integralis, Bd. I, p. 213—247, Bd. IV, p. 78—354.

2) U. Dini, Grundlagen, p. 523.

3) Nova Acta Academiae Petropolitanae, Bd. 5, p. 114; (1787) 1789.

Eine Anwendung von § 22, 10 liefert nun für $\left(\frac{x}{y}\right)$ unmittelbar den folgenden endlichen Ausdruck durch Gammafunktionen

$$\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{x}{a}\right)\Gamma\left(\frac{y}{a}\right)}{a \cdot \Gamma\left(\frac{x+y}{a}\right)} \tag{5}$$

oder, was offenbar dasselbe ist:

$$\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{a} \cdot B\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right), \tag{6}$$

so daß sich das Integral $\left(\frac{x}{y}\right)$ auf eine Betafunktion reduziert.

Die Formel (5) war auch, wenigstens in spezielleren Fällen, Euler[1]) bekannt; allgemeiner ist sie von Legendre[2]) angegeben, während sie vollständig zuerst von Poisson[3]), später von Jacobi[4]) hergeleitet worden ist.

Eine Anwendung der gewöhnlichen Produktdarstellung für $\Gamma(x)$ gibt für $\left(\frac{x}{y}\right)$ vermöge (5) die Entwicklung:

$$\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x+y}{xy} \cdot \prod_{s=1}^{s=\infty} \frac{as \cdot (x+y+as)}{(x+as)\cdot(y+as)}, \tag{7}$$

welche man ebenfalls Euler[5]) verdankt.

Wir wollen hier noch eine direkte Anwendung der Formel (1) mitteilen. Setzen wir in dieser Formel $t = e^{-z}$, so erhalten wir:

$$\left(\frac{x}{y}\right) = \int_0^\infty e^{-zx}(1 - e^{-az})^{\frac{y}{a}-1} dz; \tag{8}$$

aus der Identität:

$$\sin(ty) = \frac{e^{tyi} - e^{-tyi}}{2i}$$

folgt daher unmittelbar die andere:

$$\int_0^\infty e^{-tx}(\sin ty)^z dt = (2i)^{-z}\int_0^\infty e^{-(x-yzi)t}(1 - e^{-2yti})^z dt, \tag{9}$$

---

1) Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, Bd. 16, p. 109; (1771) 1772. Institutiones calc. int., Bd. IV, p. 98.

2) Mémoires de l'Institut 1809, p. 416. Exercices de calcul intégral, Bd. I. p. 279; 1811.

3) Journal de l'École Polytechnique, cahier 19, p. 404.

4) Journal für Mathematik, Bd. 11, p. 307.

5) Miscellanea Taurinensia, Bd. 3, p. 156; (1762—1765) 1766.

wo man also $\Re(yi) \geqq 0$ und $\Re(x - yzi) > 0$ annehmen muß. Eine Vergleichung der Formeln (1) und (9) ergibt dann unmittelbar vermöge (5):

$$(10) \qquad \int_0^\infty e^{-tx} \sin (ty)^z dt = \frac{\Gamma(z+1)\Gamma\left(-\frac{yz+xi}{2y}\right)}{(2i)^{z+1} \cdot y \cdot \Gamma\left(1+\frac{yz-xi}{2y}\right)},$$

eine Formel, die von Lobatschewsky[1]) herrührt.

§ 53. Integraldarstellungen für die Betafunktion.

Die Formel § 52, (5) zeigt deutlich, daß die Allgemeinheit der Funktion $\left(\frac{x}{y}\right)$ nicht durch die Annahme $a = 1$ beschränkt wird. Nichtsdestoweniger haben verschiedene Annahmen über die Werte von a in der älteren Literatur über die Betafunktion ganze Formelsammlungen geliefert; man vergleiche z. B. die Arbeiten von Euler.[2]) Wir wollen indessen auf diese nur scheinbare Allgemeinheit der Funktion $\left(\frac{x}{y}\right)$ verzichten und setzen einfach:

$$(1) \qquad \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \quad \Re(x) > 0, \ \Re(y) > 0.$$

Aus dieser Formel kann man mehrere andere herleiten, welche uns in den Anwendungen häufig nützlich sein werden; wir wollen hier die wichtigsten dieser Umformungen der Formel (1) mitteilen.

1) Setzt man im folgenden Integrale $t = \sqrt{z}$, so erhält man wegen (1) die ähnliche Formel:

$$(2) \qquad \int_0^1 t^{2x-1}(1-t^2)^{y-1}dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad \Re(x) > 0, \ \Re(y) > 0;$$

indem man $t = \sin \varphi$ einführt, ergibt sich daraus:

$$(3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \varphi)^{2x-1} (\cos \varphi)^{2y-1} d\varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad \Re(x) > 0, \ \Re(y) > 0.$$

2) Transformiert man das folgende Integral durch die Substitution $t = \operatorname{tg}^2 \varphi$, so erhält man wegen (3) die Formel:

1) Mémoires de Kasan 1835, p. 211.

2) Man vergleiche die Zitate, p. 131, namentlich Institutiones calculi integralis, Bd. IV.

$$(4) \qquad \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\,dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(y+y)}, \quad \Re(x) > 0, \quad \Re(y) > 0$$

und daraus, indem man $t = z^2$ einführt, die weitere Formel:

$$(5) \qquad \int_0^\infty \frac{z^{2x-1}}{(1+z^2)^{x+y}}\,dz = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad \Re(x) > 0, \quad \Re(y) > 0.$$

3) Eine andere Formel entsteht, indem man in (4):

$$\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$$

einführt und dann das letzte Integral rechter Hand durch die Transformation $t = 1 : z$ umformt; dadurch findet man:

$$(6) \qquad \int_0^1 \frac{t^{x-1}+t^{y-1}}{(1+t)^{x+y}}\,dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad \Re(x) > 0, \quad \Re(y) > 0.$$

Die Formeln (4) und (6) rühren schon von Euler[1]) her; aus (6) findet man unter Zuhilfenahme von § (6), (5) die von Legendre[2]) bemerkte speziellere Formel:

$$(7) \qquad \int_1^1 \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{2x}}\,dt = \frac{\Gamma(x)\sqrt{\pi}}{2^{2x}\cdot\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}, \quad \Re(x) > 0.$$

Setzt man endlich in (6) $t = \frac{1-z}{1+z}$, so findet man mit Binet[3]), daß:

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2^{x+y-1}}\cdot\int_0^1 [(1+z)^{x-1}(1-z)^{y-1} + (1+z)^{y-1}(1-z)^{x-1}]\,dz = \\ &\qquad = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \end{aligned} \right.$$

sein muß; natürlich muß man auch hier $\Re(x) > 0$, $\Re(y) > 0$ annehmen.

Nach diesen Umformungen des ersten *Eulerschen* Integrals wollen wir nunmehr einige interessante Spezialfälle desselben betrachten.

---

1) Novi Comment. Acad. Petrop., Bd. 6, p. 118; 1761. Institiones calculi integralis, Bd. IV, pp. 358, 354.

2) Exercices de calcul intégral, Bd II, p. 159; 1817.

3) Journal de l'École Polytechnique, cahier 27, p. 133; 1839.

1) Setzt man in (1) $y = n$, wo n eine positive ganze Zahl bedeutet, so wird:

$$(9)\qquad \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot (n-1)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{n-1}dt, \quad \Re(x) > 0;$$

daraus ergibt sich für die in § 3, (7) definierte Funktion $\mathfrak{F}_n(x)$ die Integraldarstellung:

$$(10)\qquad \mathfrak{F}_n(x) = n^x \cdot \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{n-1}dt;$$

somit ergibt die Transformation $t = nz$ die schöne Formel:

$$(11)\qquad \mathfrak{F}_n(x) = \int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}dt, \quad \Re(x) > 0,$$

welche von Gauß[1]) bemerkt worden ist.

2) Die *Eulersche* Formel § 4, (6) für das Produkt $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$ ergibt endlich vermöge (1), (4) und (6) die spezielleren Formeln:

$$(12)\qquad \frac{\pi}{\sin \pi x} = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{-x}dt, \quad 0 < \Re(x) < 1,$$

$$(13)\qquad \frac{\pi}{\sin \pi x} = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{1+t}dt, \quad 0 < \Re(x) < 1,$$

$$(14)\qquad \frac{\pi}{\sin \pi x} = \int_0^1 \frac{t^{x-1}+t^{-x}}{1+t}dt, \quad 0 < \Re(x) < 1,$$

welche sämtlich von Euler[2]) herrühren.

Die Substitution $y = n + 1 - x$, wo n eine ganze, nicht negative Zahl bedeutet, liefert vermöge (1) und (4) die noch allgemeineren Formeln:

$$(15)\qquad \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{n-x}dt = \frac{(-1)^n\pi}{\sin \pi x}\cdot\binom{x-1}{n}, \quad 0 < \Re(x) < n+1,$$

$$(16)\qquad \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{n+1}}dt = \frac{(-1)^n\pi}{\sin \pi x}\cdot\binom{x-1}{n}, \quad 0 < \Re(x) < n+1,$$

---

1) Comment. Gotting., Bd. 2, p. 32; 1812. Werke, Bd. III, p. 151. Deutsche Ausgabe, p. 39.

2) Miscellanea Berolinensia, Bd. 7, pp. 99, 151, 155; 1743. Acta Academiae Petropolitanae 1777 II, p. 36; 1780. Ebenda 1784 I, pp. 23, 35, 102; 1784. Institutiones calculi integralis, Bd. IV, p. 123.

Endlich integrieren wir in (14) nach x von $\frac{1}{2}$ bis x und erhalten dann ohne Mühe die weitere Formel von Euler[1]):

$$\log \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = \int_0^1 \frac{t^{x-1} - t^{-x}}{(1+t)\log t}, \quad 0 < \Re(x) < 1. \tag{17}$$

§ 54. Die Zahlenwerte $\Gamma\left(\frac{p}{8}\right)$ und $\Gamma\left(\frac{q}{12}\right)$.

Als eine weitere Anwendung des ersten *Eulerschen* Integrals wollen wir die Zahlenwerte $\Gamma\left(\frac{p}{8}\right)$ und $\Gamma\left(\frac{q}{12}\right)$, wo p und q ganze Zahlen bedeuten, welche so zu wählen sind, daß die Nenner in den Argumenten größer als 2 werden, auf volle elliptische Integrale reduzieren.

Zu diesem Zwecke gehen wir mit Gauß[2]) von dem folgenden Spezialfall des ersten Eulerschen Integrals $\left(\frac{x}{y}\right)$ aus:

$$J(\alpha, \beta) = \int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{\sqrt{1-t^\beta}}\, dt = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\sqrt{\pi}}{\beta \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\beta}\right)} \tag{1}$$

oder auch wegen § 6, (5):

$$J(\alpha, \beta) = \frac{2^{\frac{2\alpha}{\beta}-1} \cdot \left(\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right)^2}{\beta \cdot \Gamma\left(\frac{2\alpha}{\beta}\right)}. \tag{2}$$

Die Annahme $\alpha = 1$, $\beta = 4$ ergibt dann erstens:

$$J(1, 4) = \frac{\left(\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right)^2}{\sqrt{32\pi}}; \tag{3}$$

zweitens ist aber:

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \pi\sqrt{2}, \tag{4}$$

und somit sind die beiden Zahlenwerte $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$ und $\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$ auf das

---

1) Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, Bd. 19, p. 86; (1774) 1775. Acta Acad. Petrop. 1777 II, p. 46; 1780. Institutiones calculi integralis, Bd. IV, p. 123.

2) Comment. Gotting., Bd. 2, p. 31. Werke, Bd. III, p. 150. Deutsche Ausgabe, p. 38.

volle elliptische Integral $J(1, 4)$ reduziert; dies Resultat war schon Euler[1]) bekannt. Wir bemerken, daß das Integral $J(1, 4)$ mit der Rektifikation der Lemniskate in sehr naher Verbindung steht.

Nachdem die Zahlenwerte $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$ und $\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$ bestimmt worden sind, setzen wir in (2) $\alpha = 1$, $\beta = 8$; daraus folgt:

$$J(1, 8) = \frac{\left(\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)\right)^2}{2^{\frac{15}{4}} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}, \tag{5}$$

und somit zeigen die Formeln:

$$\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)\Gamma\left(\frac{5}{8}\right) = 2^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{4}\right), \tag{6}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)\Gamma\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{8}}, \tag{7}$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{8}\right)\Gamma\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{3\pi}{8}}, \tag{8}$$

daß die vier Zahlenwerte $\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)$, $\Gamma\left(\frac{3}{8}\right)$, $\Gamma\left(\frac{5}{8}\right)$ und $\Gamma\left(\frac{7}{8}\right)$ auf die Integrale $J(1, 4)$ und $J(1, 8)$ reduziert werden können.

Weiter setzen wir in (2) $\alpha = 1$, $\beta = 3$ und finden somit:

$$J(1, 3) = \frac{\left(\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right)^2}{3 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}; \tag{9}$$

nun ist aber:

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}, \tag{10}$$

und somit erhalten wir wegen (9):

$$J(1, 3) = \frac{\left(\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right)^3}{3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{4}{3}} \cdot \pi}, \tag{11}$$

so daß $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$ und $\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)$ auf das Integral $J(1, 3)$ reduziert werden

1) Miscellanea Taurinensia, Bd. 3, 1762—1763, p. 172—174; 1765.

können; aus den Formeln:

$$\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = 2^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{3}\right), \tag{12}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{6}} = 2\pi \tag{13}$$

reduziert man dann auch $\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)$ und $\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)$ auf dasselbe Integral $J(1, 3)$.

Endlich setzen wir in (2) $\alpha = 1$, $\beta = 12$ und erhalten somit:

$$J(1, 12) = \frac{\left(\Gamma\left(\frac{1}{12}\right)\right)^2}{2^{\frac{5}{6}} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}; \tag{14}$$

unter Zuhilfenahme der drei Formeln:

$$\Gamma\left(\frac{1}{12}\right)\Gamma\left(\frac{11}{12}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{12}}, \tag{15}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{12}\right)\Gamma\left(\frac{7}{12}\right) = 2^{\frac{5}{6}} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{6}\right), \tag{16}$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{12}\right)\Gamma\left(\frac{7}{12}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{5\pi}{12}} \tag{17}$$

können wir also die vier Zahlenwerte $\Gamma\left(\frac{1}{12}\right)$, $\Gamma\left(\frac{5}{12}\right)$, $\Gamma\left(\frac{7}{12}\right)$ und $\Gamma\left(\frac{11}{12}\right)$ auf die beiden Integrale $J(1, 3)$ und $J(1, 12)$ reduzieren.

Legendre[1]) hat die Integrale $J(1, 3)$, $J(1, 8)$ und $J(1, 12)$ im Hinblick auf die vorhergehenden Anwendungen auf volle elliptische Integrale reduziert; später hat Glaisher[2]) die oben hergeleiteten Resultate wiedergefunden.

Über die Reduktion von $J(1, 3)$ auf elliptische Integrale durch Änderung des Integrationsweges kann man die Arbeit von Bigler[3]) oder das Büchlein von Graf[4]) vergleichen.

---

1) Traité des fonctions elliptiques et des intégrales Eulériennes, Bd. II, p. 381—388; Paris 1826.

2) Messenger (2), Bd. 24, p. 27—47; 1894.

3) Journal für Mathematik, Bd. 102, p. 237—254; 1887.

4) Einleitung in die Theorie der Gammafunktion, p. 20—28; Bern 1894.

§ 55. Die Entwicklungskoeffizienten b_n und β_n des § 17.

Als letzte Anwendung des ersten Eulerschen Integrals wollen wir hier noch die in § 17 eingeführten Entwicklungskoeffizienten b_n und β_n, d. h. die Koeffizienten der beiden Potenzreihen:

$$\frac{1}{2} \cdot B\left(\frac{x+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots, \qquad |x| < 1 \tag{1}$$

$$x \cdot B\left(\frac{x}{2}, \frac{1}{2}\right) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \cdots, \qquad |x| < 2 \tag{2}$$

als bestimmte Integrale und unendliche Reihen darstellen.

Das erste Eulersche Integral ergibt nämlich unmittelbar vermöge (1):

$$\int_0^1 t^x (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} dt = \sum_{s=0}^{s=\infty} b_s \cdot x^s, \tag{3}$$

wo man also $|x| < 1$ voraussetzen muß; aus (3) findet man aber die Integraldarstellung:

$$n! b_n = \int_0^1 \frac{(\log t)^n}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log \sin \varphi)^n d\varphi; \tag{4}$$

somit liefert die Potenzreihe:

$$(1-t^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2s-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2s} \cdot t^{2s}, \qquad |t| < 1$$

unter Anwendung der bekannten Integralformel:

$$\int_0^1 t^{x-1} (\log t)^r dt = \frac{(-1)^r r!}{x^{r+1}}, \qquad \Re(x) > 0, \tag{5}$$

wo r eine ganze und nicht negative Zahl bedeutet, für b_n den Ausdruck:

$$(-1)^n b_n = 1 + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2s-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2s} \cdot \left(\frac{1}{2s+1}\right)^{n+1}. \tag{6}$$

Da nun offenbar in (2) $\beta_0 = 2$ sein muß, so folgt aus der Formel:

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} - 1\right) t^{x-1} dt = \frac{1}{2} \cdot B\left(\frac{x}{2}, \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{x}$$

die weitere Identität:

$$(7) \qquad 2\cdot\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}-1\right)t^{x-1}dt=\sum_{s=0}^{s=x}\beta_{s+1}\cdot x^s$$

und aus ihr durch dieselbe Methode wie vorher:

$$(8) \qquad \begin{cases} (n-1)!\beta_n = 2\cdot\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}-1\right)\frac{(\log t)^{n-1}}{t}\,dt = \\ \qquad = 2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\cdot(\log\sin\varphi)^{n-1}d\varphi, \end{cases}$$

$$(9) \qquad (-1)^{n-1}\beta_n = 2\cdot\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2s-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2s}\cdot\left(\frac{1}{2s}\right)^n.$$

Die Formeln § 17, (7), (8) ermöglichen uns also, die bestimmten Integrale in (4) und (8) und die numerischen Reihen in (6) und (9) als ganze Polynome der Summen σ_r darzustellen. Wir erwähnen z. B. die Formeln von Euler[1]):

$$(10) \qquad \begin{cases} \frac{\pi}{2}\cdot\log 2 = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin\varphi\,d\varphi = \\ \qquad = 1+\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2s-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2s)}\cdot\left(\frac{1}{2s+1}\right)^2, \end{cases}$$

welche man aus (4) für $n=1$ findet, und die ähnliche Formel:

$$(11) \qquad 1+\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2s-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2s)}\cdot\left(\frac{1}{2s+1}\right)^3=\frac{\pi^3}{48}+\frac{\pi}{4}(\log 2)^2,$$

welche von Besgue[2]) bemerkt worden ist; sie geht offenbar aus (6) für $n=2$ hervor.

§ 56. Allgemeine Integraldarstellung für $B(x, y)$.

Wir bezeichnen mit W einen geschlossenen Integrationsweg, welcher, vom Punkte -1 ausgehend und sich unter der Achse der reellen Zahlen hinziehend, den Ursprung rechtläufig umgeht und

1) Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, Bd. 14, p. 167; (1769) 1770.

2) Journal de Mathématiques (2), Bd. 5, p. 367—368; 1860.

danach oberhalb der Achse der reellen Zahlen wieder zu dem Anfangspunkt -1 zurückkehrt, ohne jemals sich selbst zu schneiden.

Auf Grund dieser Bestimmung von W wollen wir nunmehr das folgende Integral:

$$U = \int_W t^{-x}(1+t)^{y-1}\,dt \tag{1}$$

untersuchen. Es ist dann erstens offenbar, daß die Konvergenz von U die Bedingung $\Re(y) > 0$ erfordert; zweitens leuchtet ein, daß U eine in x ganze transzendente Funktion darstellen muß, welche in den Punkten:

$$x = 0,\ -1,\ -2,\ -3,\ -4,\ \cdots$$

Nullstellen hat; denn für diese Werte von x hat die zu integrierende Funktion keine Singularität in dem von W umschlossenen Bereiche.

Nach diesen Auseinandersetzungen denken wir uns vorläufig $\Re(x) < 1$, so daß der Integrationsweg durch den Punkt $t = 0$ hindurchgehen darf; damit reduziert sich W auf die Strecken von -1 bis 0 und von 0 bis -1. Von $t = -1$ ausgehend, setzen wir $t = u \cdot e^{-\pi i}$, wo u eine positive reelle Größe bedeutet, und erhalten so die Formel:

$$U = e^{\pi x i} \cdot \int_0^1 t^{-x}(1-t)^{y-1}\,dt - e^{-\pi x i} \cdot \int_0^1 t^{-x}(1-t)^{y-1}\,dt, \tag{2}$$

wo also die beiden Integrale geradlinig zu nehmen sind; aus (2) findet man aber vermöge § 53, (1), daß:

$$U = 2i \sin \pi x \cdot B(1-x, y) = 2i \sin \pi x \cdot \frac{\Gamma(1-x)\Gamma(y)}{\Gamma(1-x+y)} \tag{3}$$

sein muß; daraus folgt durch Anwendung der Formel für $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$:

$$\frac{\Gamma(y)}{\Gamma(x)\Gamma(1-x+y)} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_W t^{-x}(1+t)^{y-1}\,dt, \quad \Re(y) > 0. \tag{4}$$

Diese Darstellung der Betafunktion ist beinahe wortgetreu aus dem Büchlein von Graf[1]) entnommen.

Setzt man speziell in (4) $x = n + 1$, wo n eine ganze, nicht negative Zahl bedeutet, und führt man wieder x statt y ein, so ergibt sich für den allgemeinen Binomialkoeffizient die Integraldarstellung:

$$\binom{x-1}{n} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_W t^{-n-1}(1+t)^{x-1}\,dt, \qquad \Re(x) > 0. \tag{5}$$

---

1) Einleitung in die Theorie der Gammafunktion, p. 29—30; Bern 1894.

Die Formel (3) repräsentiert also die eigentliche Erweiterung des ersten Eulerschen Integrals; in dieser Formel ist die Variabilität von x eine völlig unbeschränkte, während y noch der Bedingung $\mathfrak{R}(y) > 0$ unterworfen sein muß. Wie Bigler[1]) gezeigt hat, ist es möglich, unser Integral U so zu verallgemeinern, daß auch diese Beschränkung wegfällt.

Wir bemerken noch, daß Saalschütz[2]) das erste Eulersche Integral durch die Methode von Cauchy[3]), welche wir in § 58 auf das zweite Eulersche Integral anzuwenden haben, erweitert hat.

Kapitel XI.

Das zweite Eulersche Integral.

§ 57. Integraldarstellungen für $\Gamma(x)$.

Wir haben in § 53, (11) die Funktion $\mathfrak{F}_n(x)$ als bestimmtes Integral folgendermaßen dargestellt:

$$\mathfrak{F}_n(x) = \int_0^n t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} dt, \qquad \mathfrak{R}(x) > 0. \tag{1}$$

In dieser Formel läßt Gauß[4]) die *endliche* positive ganze Zahl n über jede Grenze hinauswachsen; die Funktion $\mathfrak{F}_n(x)$ geht dann sicher in $\Gamma(x)$ über, und wenn man den Grenzübergang rechter Hand als legitim ansehen darf, so findet man die berühmte Formel:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{x-1} dt, \qquad \mathfrak{R}(x) > 0. \tag{2}$$

Die oben angedeutete Schlußweise ist indessen nicht streng; wir haben daher einem ganz anderen Weg zu folgen, um die heuristisch hergeleitete Formel (2) in aller Strenge zu beweisen.

Zu diesem Zwecke bemerken wir zuerst, daß das Integral:

$$H(x) = \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{x-1} dt, \qquad \mathfrak{R}(x) > 0 \tag{3}$$

---

1) Journal für Mathematik, Bd. 102, p. 237—254; 1887.

2) Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 33, p. 362—371; 1888.

3) Journal de l'École Polytechnique, cahier 28, p. 204—205; 1841.

4) Comment. Gotting., Bd. 2, p. 32; 1812. Werke, Bd. III, p. 151. Deutsche Ausgabe, p. 40.

für jeden endlichen Wert von x eine in x analytische Funktion darstellen muß; setzt man nämlich:

$$H(x) = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \tag{4}$$

so hat man für das letzte Integral in (4), welches ja der Gattung $\mathfrak{B}(x)$ angehört, mittels § 50, (2) die Partialbruchentwicklung:

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \cdot \frac{1}{x+s} = P(x), \tag{5}$$

wo $P(x)$ die in § 9, (1) eingeführte Funktion bedeutet.

Inbetreff des letzten Integrals rechter Hand in (4) zeigt die in § 45 angewandte Methode, daß es eine in x ganze transzendente Funktion darstellen muß.

Um nun den vollen Zusammenhang zwischen $H(x)$ und $\Gamma(x)$ klarzulegen, setzen wir vorläufig x als *positiv* und *reell* voraus und benutzen einige bekannte Eigenschaften der Funktion e^x. Bezeichnen wir mit b eine *positive* Größe, so ist offenbar:

$$e^b > 1 + b$$

und somit auch:

$$e^{-b} < \frac{1}{1+b}; \tag{6}$$

ist nun c ein positiver echter Bruch, so hat man weiter vermöge der gewöhnlichen Potenzreihe:

$$e^{-c} > 1 - c. \tag{7}$$

Es seien nun a und r positive Größen, p aber eine ganze Zahl, die größer als a ist, dann hat man offenbar wegen (6) und (7):

$$\frac{1}{1+\frac{a}{r}} > e^{-\frac{a}{r}}, \quad e^{-\frac{a}{p}} > 1 - \frac{a}{p};$$

daraus folgt:

$$\left(1+\frac{a}{r}\right)^{-r} > e^{-a} > \left(1-\frac{a}{p}\right)^p,$$

und somit ergeben sich aus (3) die beiden Ungleichungen:

$$\int_0^p t^{x-1}\left(1-\frac{t}{p}\right)^p dt < H(x) < \int_0^\infty t^{x-1}\left(1+\frac{t}{r}\right)^{-r} dt, \tag{8}$$

wo r positiv ist; denn da die zu integrierende Funktion auch *positiv* ist, hat man offenbar:

$$\int_0^p e^{-t} t^{x-1} dt < \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Setzt man nun aber linker Hand in (8) $t = pz$, so wird:

$$\int_0^p t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{p}\right)^p dt = p^x \cdot \int_0^1 z^{x-1}(1 - z)^p dz;$$

daraus folgt wegen § 53, (10), weil p eine positive ganze Zahl bedeutet:

$$\int_0^p t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{p}\right)^p dt = \left(\frac{p}{p+1}\right)^x \cdot \mathfrak{F}_{p+1}(x). \tag{9}$$

Für das letzte Integral in (8) ergibt die Transformation:

$$1 + \frac{t}{r} = \frac{1}{z}$$

ohne Mühe die Identität:

$$\int_0^\infty t^{x-1}\left(1 + \frac{t}{r}\right)^{-r} dt = r^x \cdot \int_0^1 z^{r-x-1}(1 - z)^{x-1} dz;$$

daraus folgt, indem man $r - x = p$ setzt, wo p dieselbe positive ganze Zahl wie in (9) bedeutet, wegen § 53, (10):

$$\int_0^\infty t^{x-1}\left(1 + \frac{t}{r}\right)^{-r} dt = \left(\frac{p+x}{p}\right)^x \mathfrak{F}_p(x).$$

Somit haben wir die beiden Ungleichungen bewiesen:

$$\left(\frac{p}{p+1}\right)^x \mathfrak{F}_{p+1}(x) < H(x) < \left(\frac{p+x}{p}\right)^x \mathfrak{F}_p(x). \tag{10}$$

Läßt man aber nun in (10) die willkürliche positive ganze Zahl p über jede Grenze hinauswachsen, so entsteht, da x ja eine positive endliche Größe bedeutet, die Identität

$$H(x) = \Gamma(x),$$

welche in jedem endlichen Punkte der durch die Ungleichung $\mathfrak{R}(x) < 0$ bestimmten Halbebene richtig sein muß, weil sich die beiden Funktionen $H(x)$ und $\Gamma(x)$ in diesem Bereiche regulär verhalten. Damit ist die Formel (2) in aller Strenge bewiesen.

Der oben gegebene Beweis rührt im wesentlichen von Schlömilch[1]) her; Pringsheim[2]) hat einen anderen strengen Beweis der Formel (2) gegeben.

1) Kompendium der höheren Analysis, Bd. II, p. 245—247; 1879.

2) Mathematische Annalen, Bd. 31, p. 459; 1888.

Setzt man in (2) $t = -\log z$, so erhält man eine weitere Integraldarstellung von $\Gamma(x)$:

$$\Gamma(x) = \int_0^1 \left(\log \frac{1}{z}\right)^{x-1} dz, \qquad \Re(x) > 0, \tag{11}$$

die von Euler[1]) herrührt.

Wir wollen noch den speziellen Fall von (2) betrachten, wo $x = 1 : p$ ist, wenn p eine positive ganze Zahl bedeutet; die Transformation $t = z^p$ ergibt dann ohne Mühe:

$$\Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right) = \int_0^\infty e^{-t^p} dt; \tag{12}$$

daraus folgt für $p = 2$ die berühmte Formel:

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \tag{13}$$

die Laplace[2]) so sinnreich bewiesen hat; sie war indessen schon Euler[3]) bekannt.

Setzt man in (2) $t = e^z$, so ergibt sich folgende Integraldarstellung:

$$\Gamma(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-e^z} \cdot e^{xz} dz, \tag{14}$$

welche Gauß[4]) als die beste Definition der Gammafunktion bezeichnet. Pringsheim[5]) bemerkt indessen, daß er nur eine einzige Arbeit, die von Liouville[6]) herrührt, gefunden habe, die von der Definition (14) ausgeht; ich kann nur eine kleine Note von Cauchy[7]) hinzufügen, wo die Definition (14) ebenfalls eine Rolle spielt.

Es ist noch zu erwähnen, daß Bachmann[8]) aus (12) noch andere Integralformeln hergeleitet hat, indem er unter Anwendung des Integralsatzes von Cauchy längs der Peripherie eines unendlich

1) Man vergleiche z. B. die Zitate, p. 131, Nr. 3. Pringsheim bemerkt, loc. cit. p. 458, daß er die Form (2) des zweiten Eulerschen Integrals nicht früher als bei Poisson im Journal de l'École Polytechnique, cahier 19, p. 477 finden konnte; auch ich habe sie nicht früher entdecken können.

2) Mémoires de l'Académie Royale des Sciences; 1778.

3) Man vergleiche z. B. Institutiones calculi integralis, Bd. IV, p. 87.

4) Werke, Bd. III, p. 230. Deutsche Ausgabe, p. 82.

5) loc. cit. p. 456. 6) Journal de Mathématiques, Bd. 17, p. 448; 1852.

7) Comptes rendus, Bd. 19, p. 68; 1844.

8) Mathematische Annalen, Bd. 15, p. 424—432; 1879.

großen Kreissektors integriert, welcher sein Zentrum in dem **Ursprung** hat und ganz im ersten oder vierten Quadranten liegt; wir überlassen es dem Leser, die Formeln von Bachmann herzuleiten, was keine Schwierigkeiten darbietet.

§ 58. **Verallgemeinerung der Integraldarstellung für $\Gamma(x)$.**

Die Eulersche Integraldarstellung von $\Gamma(x)$ hat den Übelstand, nur für $\Re(x) > 0$ einen Sinn zu haben; es ist indessen sehr leicht, die obengenannte Integralformel so zu ändern, daß sie auch für $\Re(x) < 0$ anwendbar wird. Zu dem Ende wollen wir den folgenden Satz von Cauchy[1]) beweisen:

Ist n eine endliche, nicht negative ganze Zahl, so ist unter der Voraussetzung:

$$(1) \qquad -n-1 < \Re(x) < -n$$

allgemein:

$$(2) \qquad \Gamma(x) = \int_0^\infty \left(e^{-t} - \varphi_n(t)\right) t^{x-1} dt,$$

wo der Kürze halber:

$$(3) \qquad \varphi_n(t) = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s t^s}{s!}$$

gesetzt worden ist.

Wir gehen von den offenbaren Identitäten:

$$(4) \qquad D_x \varphi_n(t) = -\varphi_{n-1}(t),$$

$$(5) \qquad e^{-t} - \varphi_n(t) = t^{n+1} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^{n+1+s}}{(n+1+s)!} \cdot t^s$$

aus und setzen weiter:

$$(6) \qquad H(n, x) = \int_0^\infty \left(e^{-t} - \varphi_n(t)\right) t^{x-1} dt,$$

ein Integral, das ja wegen (1) sicher konvergiert; eine partielle Integration gibt dann für $n > 0$:

$$(7) \quad H(n, x) = \left[\frac{t^x}{x}\left(e^{-t} - \varphi_n(t)\right)\right]_0^\infty + \frac{1}{x} \cdot \int_0^\infty \left(e^{-t} - \varphi_{n-1}(t)\right) t^{x-1} dt$$

1) Exercices de Mathématiques, IIe année, p. 92; 1827.

und speziell für $n = 0$:

$$H(0, x) = \left[\frac{t^x}{x}(e^{-t} - 1)\right]_0^\infty + \frac{1}{x} \cdot \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^x dt. \tag{8}$$

Nun ist offenbar, daß das erste Glied rechter Hand in (7) und (8) verschwinden muß; für $t = \infty$ ist dies eine unmittelbare Folge von (1) und (3), und für $t = 0$ führt die Formel (5) unmittelbar zum Ziele; also ergeben sich aus (7) und (8) die beiden einfacheren Formeln:

$$H(n, x) = \frac{1}{x} \cdot H(n-1, x+1), \tag{9}$$

$$H(0, x) = \frac{1}{x} \cdot \Gamma(x+1) = \Gamma(x); \tag{10}$$

eine Wiederholung der Operation (9) ergibt dann allgemeiner:

$$H(n, x) = \frac{H(0, x+n)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)};$$

daraus folgt wegen (10):

$$H(n, x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} = \Gamma(x).$$

Damit ist unser Satz bewiesen.

§ 59. Die Integraldarstellung von Weierstraß.

Es ist möglich, auch für die Gammafunktion eine ähnliche Integraldarstellung zu finden wie diejenige, welche wir in § 56 für die Betafunktion entwickelt haben. Zu dem Ende bezeichnen wir hier mit W einen Integrationsweg, welcher vom Punkte $-\infty$ ausgeht, sich unter der Achse der negativen Zahlen hinziehend, den Ursprung rechtläufig umgeht und dann oberhalb der Achse der negativen Zahlen zum Anfangspunkte $-\infty$ zurückkehrt, ohne sich selbst zu schneiden.

Unter diesen Voraussetzungen wollen wir nunmehr das bestimmte Integral:

$$U = \int_W e^t t^{-x} dt \tag{1}$$

untersuchen. Erstens ist es offenbar, daß U eine in x ganze transzendente Funktion darstellen muß, welche in den Punkten $x = 0$, $-1, -2, -3, -4, \cdots$ Nullstellen besitzt; denn für diese Werte von x hat die zu integrierende Funktion im Innern des vom Integrationswege W begrenzten Bereiches keine Singularitäten.

Um den Wert von U zu bestimmen, denken wir uns vorläufig $\Re(x) < 1$; der Integrationsweg darf dann durch den Punkt $t = 0$ hindurchgehen, und das Integral U läßt sich in diesem Falle als die Summe zweier geradlinigen Integrale darstellen. Setzt man nämlich ursprünglich $t = e^{-\pi i} \cdot u$, wo u eine sehr große positive Zahl bedeutet, so erhält man die Formel:

$$U = e^{\pi x i} \cdot \int_0^\infty e^{-t} t^{-x} dt - e^{-\pi x i} \cdot \int_0^\infty e^{-t} t^{-x} dt, \tag{2}$$

aus der wegen § 57, (2):

$$U = 2i \sin \pi x \cdot \Gamma(1 - x) \tag{3}$$

folgt; somit ergibt die Formel für $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$ die allgemein gültige Integraldarstellung:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_W e^t t^{-x} dt, \tag{4}$$

welche nach Schläfli[1]) zuerst von Weierstraß gefunden worden ist; dieselbe Formel findet sich in der Dissertation von Hankel[2]) und ist später auch von Heine[3]) hergeleitet worden.

Pochhammer[4]) hat die Fundamente einer Theorie der Gammafunktion mit dem Integral (4) und ähnlichen Darstellungen als Ausgangspunkt geliefert.

§ 60. Der Zusammenhang zwischen $\Gamma(x)$ und $B(x, y)$.

Wir wollen hier ganz kurz die Beweise von Jacobi und Lejeune-Dirichlet für die Eulersche Formel:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x + y)} \tag{1}$$

mitteilen.

Jacobi[5]) setzt, indem x und y als *positiv* vorausgesetzt werden:

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \cdot \int_0^\infty u^{y-1} e^{-u} du = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(t+u)} t^{x-1} u^{y-1} dt\, du; \tag{2}$$

die Transformationen:

$$t + u = \alpha, \quad u = \alpha\beta \tag{3}$$

1) Mathematische Annalen, Bd. 3, p. 148; 1871.

2) Dissertation, p. 28; Leipzig 1863. Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 9; 1864.

3) Journal für Mathematik, Bd. 89, p. 21; 1880.

4) Mathematische Annalen, Bd. 35, p. 495—526; 1890.

5) Journal für Mathematik, Bd. 11, p. 307.

ergeben dann:

$$(4) \qquad \begin{cases} t = \alpha(1-\beta), & u(1-\beta) = t\beta, \\ dt = (1-\beta)d\alpha, & (1-\beta)du = \alpha d\beta, \end{cases}$$

und somit erhält man aus (2) die weitere Formel[1]):

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty e^{-\alpha}\alpha^{x+y-1}d\alpha \cdot \int_0^1 \beta^{x-1}(1-\beta)^{y-1}d\beta,$$

aus der sich unmittelbar die Formel (1) ergibt.

Lejeune-Dirichlet[2]) geht von der Formel § 53, (4):

$$(5) \qquad B(x, y) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\,dt$$

aus, wo ebenso wie vorher x und y als *positiv* angenommen werden.

Die Integralformel § 57, (2) ergibt dann, wenn man tk statt t einführt, wo k eine positive Konstante bedeutet, folgende Darstellung:

$$(6) \qquad \int_0^\infty e^{-tk}t^{x-1}dt = \frac{\Gamma(x)}{k^x};$$

somit erhält man aus (5) das Doppelintegral:

$$B(x, y) = \frac{1}{\Gamma(x+y)} \cdot \int_0^\infty t^{x-1}dt \cdot \int_0^\infty e^{-(1+t)u} \cdot u^{x+y-1}du.$$

Hier ist die Vertauschung der Integrationsfolge erlaubt[3]); also ist:

$$B(x, y) = \frac{1}{\Gamma(x+y)} \cdot \int_0^\infty e^{-u}u^{x+y-1}du \cdot \int_0^\infty e^{-tu}t^{x-1}dt$$

oder auch wegen (6):

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+y)} \cdot \int_0^\infty e^{-u}u^{y-1}du.$$

Damit kommen wir auf die Formel (1) zurück.

In den vorhergehenden Beweisen haben wir der Einfachheit halber x und y als positiv und reell vorausgesetzt; bedenkt man aber, daß das erste Eulersche Integral $B(x, y)$ sowie die Funktion rechter Hand in (1) analytische Funktionen sind, so bleibt die Formel (1) für willkürliche Werte dieser beiden Veränderlichen richtig.

---

1) Stolz, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung, Bd. III, p. 89—90.

2) Werke, Bd. I, p. 398. Man vergleiche auch Stolz, loc. cit. p. 179.

3) Stolz, loc. cit. p. 184 ff.

Kapitel XII.

Durch Gammafunktionen ausdrückbare Integrale.

§ 61. Das Integral $\int_0^\infty e^{-ty} t^{x-1} dt$.

Wir kennen bisher nicht viele Integrale, welche Gammafunktionen enthalten und dennoch durch bekannte Funktionen ausgedrückt werden können; umgekehrt kennen wir eine beträchtliche Anzahl bestimmter Integrale, welche durch Gammafunktionen in geschlossener Form ausdrückbar sind. Wir wollen hier eine möglichst vollständige Übersicht über solche bestimmte Integrale geben, die nur elementare Funktionen[1]) enthalten.

Als erstes Beispiel betrachten wir das Integral:

$$J = \int_0^\infty e^{-ty} t^{x-1} dt, \tag{1}$$

wo $\Re(x)$ und im allgemeinen auch $\Re(y)$ *positiv* angenommen werden müssen; den Speziallfall, wo y positiv ist, haben wir schon im vorigen Paragraphen behandelt.

Um den Wert von J zu bestimmen, bezeichnen wir mit R und r zwei positive Zahlen, welche sehr groß bzw. sehr klein sind, und finden dann durch die Substitution $ty = z$ die Identität:

$$\int_r^R e^{-ty} t^{x-1} dt = y^{-x} \cdot \int_{ry}^{Ry} e^{-z} z^{x-1} dz; \tag{2}$$

weiter konstruieren wir mit dem Ursprung als Zentrum und mit den Radien $R \cdot |y|$ und $r \cdot |y|$ zwei Kreise; auf dem größten dieser Kreise bilden wir in A und B die Zahlen $R \cdot |y|$ und $R \cdot y$, auf dem kleinsten in a und b die Zahlen $r \cdot |y|$ und $r \cdot y$ ab.

1) Über bestimmte Integrale, welche durch Gammafunktionen ausdrückbar sind und Zylinderfunktionen bzw. den Integrallogarithmus enthalten, vergleiche man mein Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen, Kapitel XII, XIII; Leipzig, Teubner 1904, bzw. Schlömilch, Beiträge, p. 72 ff.; Jena 1848. Ich hoffe bald bei einer anderen Gelegenheit zu zeigen, daß diese beiden Integralgattungen als Spezialfälle einer allgemeineren aufgefaßt werden können. Appell hat in den Comptes rendus Bd. 86, p. 874—876, 1878 ein Integral gefunden, welches hypergeometrische Funktionen enthält und durch Gammafunktionen ausdrückbar ist; man vergleiche auch O. Callandreau in Compt. rend. Bd. 89, p. 90—92; 1879.

Nach diesen Erörterungen betrachten wir nunmehr das Integral:

$$J_1 = \int_{aABb} e^{-z} z^{x-1} dz.$$

Der Fundamentalsatz von Cauchy gibt dann unmittelbar für J_1 den Wert Null, d. h.:

$$(3) \qquad 0 = \int_{r|y|}^{R|y|} + \int_{AB} + \int_{Ry}^{ry} + \int_{ba};$$

im zweiten Integral rechter Hand in (3) setzen wir demnach:

$$z = R \cdot |y| e^{i\Theta}$$

und finden so:

$$(4) \qquad \int_{AB} = i(R \cdot |y|)^x \int_0^{\omega} e^{-R \cdot |y| e^{i\Theta} + ix\Theta} d\Theta,$$

indem wir der Kürze halber:

$$y = |y| e^{i\omega}, \qquad -\frac{\pi}{2} < \omega < +\frac{\pi}{2}$$

gesetzt haben; es sei nun weiter:

$$x = \alpha + i\beta,$$

wo α und β beide reell sind, dann ergibt sich aus (4):

$$\left|\int_{AB} e^{-z} z^{x-1} dz\right| \leqq (R \cdot |y|)^{\alpha} \cdot \int_0^{\omega} e^{-R \cdot |y| \cos\Theta - \beta\Theta} d\Theta$$

und daraus:

$$\left|\int_{AB} e^{-z} z^{x-1} dz\right| \leqq (R \cdot |y|)^{\alpha} e^{-R \cdot |y| \cos\omega} \cdot \frac{1 - e^{-\beta\omega}}{\beta};$$

somit wird für $\alpha > 0$ und $|\omega| < \frac{\pi}{2}$:

$$(5) \qquad \lim_{R=\infty} \left|\int_{AB} e^{-z} z^{x-1} dz\right| = 0.$$

Das letzte Integral rechter Hand in (3) läßt sich offenbar in ähnlicher Weise behandeln, so daß man:

$$(6) \qquad \lim_{r=0} \left|\int_{ba} e^{-z} z^{x-1} dz\right| = 0,$$

findet, woraus sich wegen (2) und (3) die gesuchte Formel:

$$(7) \qquad \int_0^{\infty} e^{-ty} t^{x-1} dt = y^{-x} \cdot \Gamma(x), \qquad \Re(x) > 0, \ \Re(y) > 0$$

ergibt, die von Euler[1]) herrührt.

1) Institutiones calculi integralis, Bd. IV, p. 341; 1794

§ 62. Die Integrale $\int\limits_0^\infty \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\{tb\}\cdot t^{x-1}dt$.

Aus der allgemeinen Eulerschen Integralformel § 61, (7) kann man mehrere andere herleiten; setzt man nämlich in diese Formel der Reihe nach:

$$y = a + ib, \quad y = a - ib, \quad a > 0, \quad b \geqq 0,$$

$$r = +\sqrt{a^2 + b^2}, \quad \omega = \operatorname{arctg}\frac{b}{a},$$

so daß ω mit b verschwindet, so entstehen durch Addition und Subtraktion die beiden Formeln:

$$\int\limits_0^\infty e^{-ta}\cos(tb)\,t^{x-1}dt = \frac{\Gamma(x)\cdot\cos(\omega x)}{r^x}, \tag{1}$$

$$\int\limits_0^\infty e^{-ta}\sin(tb)\,t^{x-1}dt = \frac{\Gamma(x)\cdot\sin(\omega x)}{r^x}, \tag{2}$$

welche ebenfalls von Euler[1]) herrühren. Die Formeln (1) und (2) sind später von vielen Autoren aufs neue hergeleitet worden; wir erwähnen z. B. Legendre[2]), Poisson[3]), Cauchy[4]) und Boncompagni[5]).

Wir wollen nun den spezielleren Fall $a = 0$, d. h. $\omega = \pm\frac{\pi}{2}$ näher untersuchen; zu dem Ende setzen wir in § 61, (4):

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} + \int\limits_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}, \tag{3}$$

wo ε eine kleine positive Größe bedeutet, so daß wir nur das letzte Integral rechter Hand in (3) zu untersuchen haben.

Mit derselben Bezeichnung $x = \alpha + i\beta$ wie im vorigen Paragraphen findet man hier ohne Mühe:

$$\left|\int\limits_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\right| \leqq \int\limits_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\cdot|y|\cos\Theta-\beta\Theta}d\Theta$$

---

1) loc. cit. Bd. IV, p. 342, 1794.

2) Exercices de calcul intégral, Bd. I, p. 368; 1811.

3) Journal de l'École Polytechnique, cahier 16, p. 219; 1813.

4) Exercices de Mathématiques, I^e^ année, p. 62; 1826. Journal de l'École Polytechnique, cahier 28, p. 159; 1841.

5) Journal für Mathematik, Bd. 25, p 81; 1843.

oder, was offenbar dasselbe ist:

$$\left|\int\limits_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\right| < e^{-\frac{\pi}{2}\cdot\beta}\cdot\int\limits_0^{\varepsilon} e^{-R\cdot|y|\sin\Theta+\beta\Theta}d\Theta.$$

Nun ist aber einer bekannten elementaren Formel zufolge:

$$\Theta > \sin\Theta > \Theta - \frac{\Theta^3}{2};$$

denkt man sich also R und ε so bestimmt, daß gleichzeitig:

$$R\cdot\varepsilon > (\log R)^2, \qquad R\cdot\varepsilon^3 < k$$

wird, wo k eine positive endliche Größe bedeutet, so ist offenbar auch:

$$\left|\int\limits_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\right| < \frac{k'\cdot\varepsilon}{R|y|},$$

wo k' wieder eine positive endliche Größe bedeutet. Nach diesen Erörterungen folgert man mittels der Ungleichungen des vorhergehenden Paragraphen, daß auch hier unter der Voraussetzung $0<\alpha<1$:

$$\lim_{R=\infty}\left|\int\limits_{AB} e^{-t}t^{x-1}dt\right| = 0$$

sein muß, und somit ergeben sich aus (1) und (2) die beiden neuen Formeln:

$$\int\limits_0^{\infty}\cos(tb)\cdot t^{x-1}dt = \frac{\Gamma(x)\cos\frac{\pi x}{2}}{b^x}, \tag{4}$$

$$\int\limits_0^{\infty}\sin(tb)\cdot t^{x-1}dt = \frac{\Gamma(x)\sin\frac{\pi x}{2}}{b^x}, \tag{5}$$

wo man also $b>0$ und $0<\Re(x)<1$ voraussetzen muß; man kann die beiden Formeln (4), (5) ohne Mühe auch für $b<0$ darstellen.

Setzt man $x=\frac{1}{2}$, so erhält man die speziellen Formeln:

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{\cos(tb)\,dt}{\sqrt{t}} = \int\limits_0^{\infty}\frac{\sin(tb)}{\sqrt{t}}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{2b}},$$

welche von Euler[1]) herrühren.

1) Institutiones calculi integralis, Bd. IV.

§ 63. Das Integral von Laplace.

Aus den Formeln § 62, (4), (5) wollen wir noch einige interessante Folgerungen herleiten. Wir finden zunächst unmittelbar:

$$\int_0^\infty e^{bti}t^{x-1}dt = \frac{\Gamma(x)e^{\frac{\pi x i}{2}}}{b^x},$$

$$\int_0^\infty e^{-bti}t^{x-1}dt = \frac{\Gamma(x)e^{-\frac{\pi x i}{2}}}{b^x};$$

daraus können hinwiederum die beiden neuen Formelpaare:

$$(1)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty e^{bti}(it)^{x-1}dt = \frac{\Gamma(x)e^{\pi x i}}{ib^x}, \\ \displaystyle\int_0^\infty e^{-bti}(-it)^{x-1}dt = -\frac{\Gamma(x)e^{-\pi x i}}{ib^x}, \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty e^{bti}(-it)^{x-1}dt = \frac{i\Gamma(x)}{b^x}, \\ \displaystyle\int_0^\infty e^{-bti}(it)^{x-1}dt = -\frac{i\Gamma(x)}{b^x} \end{cases}$$

hergeleitet werden, wo überall:

$$(\pm i)^\omega = e^{\pm\frac{\pi\omega i}{2}}$$

zu setzen ist.

Aus den Formelgruppen (1) und (2) findet man demnach die beiden einfacheren Integraldarstellungen:

$$(3)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{bti}(it)^{x-1}dt = \frac{2\Gamma(x)\sin\pi x}{b^x},$$

$$(4)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-bti}(it)^{x-1}dt = 0,$$

die also beide für *reelle und positive* b und für $1 > \Re(x) > 0$ richtig sind; um die beiden Integrale (3) und (4) in eine etwas bequemere Form zu bringen, setzt man:

$$t = -ai + z,$$

wo z hinwiederum als *reell* anzusehen ist, a aber eine endliche Größe bedeutet; dann erhält man offenbar die beiden Formeln:

$$\int_{ai-\infty}^{ai+\infty} e^{bzi}(a+iz)^{x-1}dz = \frac{2e^{-ab}\Gamma(x)\sin\pi x}{b^x}, \tag{5}$$

$$\int_{ai-\infty}^{ai+\infty} e^{-bzi}(a+iz)^{x-1}dz = 0, \tag{6}$$

in welchen wir noch den Integrationsweg zu ändern haben.

Zu diesem Zwecke bezeichnen wir mit R eine sehr große positive Zahl, während wir:

$$ai = \alpha + i\beta$$

setzen, wo α und β reell sind; weiter bezeichne A den Perimeter des Rechteckes mit den Eckpunkten $\pm R$ und $\pm R + i\beta$; unter diesen Voraussetzungen ergibt der Integralsatz von Cauchy:

$$0 = \int_A e^{\pm bzi}(a+iz)^{x-1}dz = 0,$$

woraus:

$$\int_{-R}^{-R+i\beta} + \int_{-R+i\beta}^{+R+i\beta} + \int_{R+i\beta}^{R} = \int_{-R}^{+R}; \tag{7}$$

folgt; läßt man nun aber die positive Zahl R über jede Grenze hinauswachsen, so verschwinden offenbar das erste und das letzte Integral linker Hand in (7); setzt man in (5) $1-x$ statt x, so liefert die Eulersche Formel für $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$ die gesuchten Integraldarstellungen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{bti}}{(a+it)^x}\,dt = \frac{2\pi e^{-ab}b^{x-1}}{\Gamma(x)}, \tag{8}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-bti}}{(a+it)^x}\,dt = 0, \tag{9}$$

wo man b als *positiv* und $\Re(x) > 0$ voraussetzen muß.

Eigentlich sind ja die beiden Formeln nur unter der Voraussetzung $1 > \Re(x) > 0$ bewiesen; da aber die beiden Seiten dieser Formeln für $\Re(x) > 0$ analytische Funktionen in x darstellen müssen, so sind unsere Formeln auch in diesem allgemeineren Falle richtig.

Die Formel (8) rührt von Laplace[1]) her; spätere Untersuchungen über die Formeln (8) und (9) sind von Poisson[2]), Legendre[3]), Cauchy[4]), Liouville[5]), Lobatschewsky[6]) und Kummer[7]) geliefert worden; der oben gegebene Beweis ist von Cayley[8]) angedeutet worden.

Wir haben noch die beiden Formeln (8) und (9) etwas umzuformen und setzen zu dem Ende:

$$a + it = (a^2 + t^2)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{i \operatorname{arctg} \frac{t}{a}};$$

daraus folgen die weiteren Formeln:

$$(10) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\left(bt - x \operatorname{arctg} \frac{t}{a}\right)}}{(t^2 + a^2)^{\frac{x}{2}}}\, dt = \frac{2\pi e^{-ab} b^{x-1}}{\Gamma(x)},$$

$$(11) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\left(bt + x \operatorname{arctg} \frac{t}{a}\right)}}{(t^2 + a^2)^{\frac{x}{2}}}\, dt = 0;$$

nun ist es offenbar erlaubt, in (10) und (11) das Zeichen von i zu ändern, was erreicht wird, wenn man einfach $-t$ statt t einführt; durch diese Änderung findet man aber aus (10):

$$(12) \qquad \int_0^{\infty} \frac{\cos\left(bt - x \operatorname{arctg} \frac{t}{a}\right)}{(t^2 + a^2)^{\frac{x}{2}}}\, dt = \frac{\pi e^{-ab} b^{x-1}}{\Gamma(x)},$$

$$(13) \qquad \int_0^{\infty} \frac{\sin\left(bt - x \operatorname{arctg} \frac{t}{a}\right)}{(t^2 + a^2)^{\frac{x}{2}}}\, dt = 0,$$

während (11) zwei ähnliche Nulldarstellungen liefert.

Nach diesen Änderungen setzen wir nunmehr in (12) und (13) $t = a \operatorname{tg} \Theta$ und führen a statt ab ein, dann ergibt sich:

---

1) Théorie analytique des probabilités, p. 471; Paris 1814.
2) Journal de l'École Polytechnique, cahier 19, p. 481; 1823.
3) Exercices de calcul intégral, Bd. I, p. 354; 1811.
4) Journal de l'École Polytechnique, cahier 28, p. 179; 1841.
5) Journal für Mathematik, Bd. 13, p. 231; 1835.
6) Mémoires de Kasan, 1835, p. 211.
7) Journal für Mathematik, Bd. 17, p. 235; 1837.
8) Journal de Mathématiques, Bd. 12, p. 231—240; 1847.

$$(14)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\Theta)^{x-2}\cos(a\operatorname{tg}\Theta - x\Theta)\,d\Theta = \frac{\pi e^{-a}\cdot a^{x-1}}{\Gamma(x)},$$

$$(15)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\Theta)^{x-2}\sin(a\operatorname{tg}\Theta - x\Theta)\,d\Theta = 0;$$

es ist aber offenbar, daß man in (14) $\Re(x) > 1$ annehmen muß, während (15) noch für $\Re(x) > 0$ einen Sinn hat; die Ursache der Verminderung des Konvergenzbereiches für das Integral (14) ist darin zu suchen, daß (12) durch eine Kombination zweier Formeln von der Form (14) entsteht.

Die beiden Formeln (14) und (15) sind von Lobatschewsky[1]) und Kummer[2]) gefunden worden.

§ 64. Das Integral von Cauchy.

Mit Lejeune-Dirichlet[3]) wollen wir eine interessante Anwendung der Formeln § 63, (8), (9) machen; zu dem Ende gehen wir von § 61, (7):

$$(1)\qquad \int_0^{\infty} e^{-(a+iu)t}\cdot t^{x-1}dt = \frac{\Gamma(x)}{(a+iu)^x}$$

aus und finden so, daß:

$$\Gamma(x)\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{(a+iu)^x(b\pm iu)^y} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{(b\pm iu)^y}\cdot\int_0^{\infty} e^{-(a+iu)t}\cdot t^{x-1}dt$$

sein muß, wo das Integral linker Hand offenbar konvergiert, wenn $\Re(x+y) > 1$ vorausgesetzt wird. Denken wir uns noch $\Re(x) > 0$ und schreiben wir jede der zwei zu integrierenden Funktionen rechter Hand unter der Form $U + iV$, wo U und V beide reell sind, so ist die Vertauschung der Integrationsfolge rechter Hand erlaubt, und wir finden demnach:

$$\Gamma(x)\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{(a+iu)^x(b\pm iu)^y} = \int_0^{\infty} e^{-ta}t^{x-1}dt\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-tui}}{(b\pm iu)^y}\,du\right);$$

1) loc. cit. 2) loc. cit.

3) Vorlesungen über bestimmte Integrale, herausgegeben von G. Arendt, p. 184—188. Braunschweig 1904. G. F. Meyer, Bestimmte Integrale, p. 205; Leipzig, B. G. Teubner, 1871.

daraus folgt wegen § 63, (9):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{(a+iu)^x (b+iu)^y} = 0, \tag{2}$$

während § 63, (8) unter Anwendung von (1) die entsprechende Formel:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{(a+iu)^x (b-iu)^y} = \frac{2\pi}{(a+b)^{x+y-1}} \cdot \frac{\Gamma(x+y-1)}{\Gamma(x)\Gamma(y)} \tag{3}$$

liefert, und die gewöhnliche Schlußweise zeigt, daß die Bedingung $\Re(x) > 0$ wegfallen darf, so daß die Formeln (2) und (3) beide unter der einzigen Bedingung $\Re(x+y) > 1$ richtig bleiben; denn unter dieser Voraussetzung sind die Funktionen beider Seiten der erwähnten Gleichungen in x analytisch.

Die allgemeinen Formeln (2) und (3) rühren von Cauchy[1]) her; später sind sie auch von Hankel[2]) bewiesen worden.

Aus den beiden Formeln (2) und (3) kann man mehrere andere herleiten; setzt man nämlich $b = a$ und:

$$a + iu = |a + iu| \cdot e^{i\Theta},$$

so erhält man aus (3) die Gleichung:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos[(x-y)\Theta]\, d\Theta}{(a^2+u^2)^{\frac{x+y}{2}}} = \frac{\pi}{(2a)^{x+y-1}} \cdot \frac{\Gamma(x+y-1)}{\Gamma(x)\Gamma(y)}, \quad \Re(x+y) > 1, \tag{4}$$

so daß die Annahme $a = 1$, $u = \operatorname{tg} \Theta$ nach einer Änderung der Bezeichnungen die weitere Formel:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(y\Theta)(\cos\Theta)^{x-1} d\Theta = \frac{\pi\,\Gamma(x)}{2^x\,\Gamma\left(\frac{x+y+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x-y+1}{2}\right)}, \quad \Re(x) > 0 \tag{5}$$

liefert, welche von Cauchy[3]) herrührt und verschiedentlich geändert werden kann.

---

1) Mémoires sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires; Paris 1825. Man vergleiche auch: Annales de Gergonne, Bd. 17, p. 109. Zitat von G. F. Meyer, loc. cit. p. 205.

2) Dissertation, p. 37; Leipzig 1863. Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 9; 1864.

3) Mémoires sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires, p. 40; Paris 1825.

Man hat nämlich:

$$(6)\quad \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (\cos\Theta)^{x-1}\cos(y\Theta)\,d\Theta = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\Theta)^{x-1}\cos(y\Theta)\,d\Theta$$

und:

$$(7)\quad \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (\cos\Theta)^{x-1}\sin(y\Theta)\,d\Theta = 0;$$

multipliziert man nun die Formeln (6) und (7) mit $\cos\frac{\pi y}{2}$ bzw. $\sin\frac{\pi y}{2}$, so ergibt die Addition der beiden so erhaltenen Gleichungen, nachdem man $\Theta + \frac{\pi}{2} = \varphi$ gesetzt hat:

$$(8)\quad \int\limits_0^{\pi} (\sin\varphi)^{x-1}\cos(y\varphi)\,d\varphi = \frac{\pi\,\Gamma(x)\cos\frac{\pi y}{2}}{2^{x-1}\,\Gamma\left(\frac{x+y+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x-y+1}{2}\right)};$$

in ähnlicher Weise findet man, wenn man (6) und (7) mit $\sin\frac{\pi y}{2}$ bzw. $\cos\frac{\pi y}{2}$ multipliziert und dann subtrahiert, die ähnliche Formel:

$$(9)\quad \int\limits_0^{\pi} (\sin\varphi)^{x-1}\sin(y\varphi)\,d\varphi = \frac{\pi\,\Gamma(x)\sin\frac{\pi y}{2}}{2^{x-1}\,\Gamma\left(\frac{x+y+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x-y+1}{2}\right)};$$

auch in (8) und (9) muß man $\Re(x) > 0$ annehmen.

Multipliziert man weiter (9) mit i und addiert man die so erhaltene Gleichung zu (8), so ergibt sich, wenn man iy statt y setzt, die weitere Formel:

$$(10)\quad \int\limits_0^{\pi} (\sin\varphi)^{x-1}\cdot e^{-y\varphi}\,d\varphi = \frac{\pi\,\Gamma(x)\,e^{-\frac{\pi y}{2}}}{2^{x-1}\,\Gamma\left(\frac{x+iy+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x-iy+1}{2}\right)},\quad \Re(x)>0,$$

welche in ganz anderer Weise von Forsyth[1]) hergeleitet worden ist.

Wir kehren nun zu Formel (3) zurück und setzen dort:

$$(a+iu) = |a+iu|\cdot e^{i\Theta},\qquad b+iu = |b+iu|\cdot e^{i\Theta_1};$$

bedenken wir, daß die beiden so erhaltenen Formeln ungeändert bleiben, wenn $-i$ statt i gesetzt wird, so erhalten wir die beiden folgenden Gleichungen:

---

1) Quarterly Journal, Bd. 27, p. 221; 1895.

$$\int_0^\infty \frac{\cos(x\Theta + y\Theta_1)\,du}{(a^2+u^2)^{\frac{x}{2}}(b^2+u^2)^{\frac{y}{2}}} = 0,$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos(x\Theta - y\Theta_1)\,du}{(a^2+u^2)^{\frac{x}{2}}(b^2+u^2)^{\frac{y}{2}}} = \frac{\pi}{(a+b)^{x+y-1}} \cdot \frac{\Gamma(x+y-1)}{\Gamma(x)\Gamma(y)};$$

daraus folgt durch Addition und Subtraktion:

$$\int_0^\infty \frac{\cos(x\Theta)\cos(y\Theta_1)\,du}{(a^2+u^2)^{\frac{x}{2}}(b^2+u^2)^{\frac{y}{2}}} = \frac{\pi}{2(a+b)^{x+y-1}} \cdot \frac{\Gamma(x+y-1)}{\Gamma(x)\Gamma(y)}, \tag{11}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x\Theta)\sin(y\Theta_1)\,du}{(a^2+u^2)^{\frac{x}{2}}(b^2+u^2)^{\frac{y}{2}}} = \frac{\pi}{2(a+b)^{x+y-1}} \cdot \frac{\Gamma(x+y-1)}{\Gamma(x)\Gamma(y)}. \tag{12}$$

Sonach ergibt die Annahme $b = 0$, d. h. $\Theta_1 = \frac{\pi}{2}$ die spezielleren Formeln:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\Theta)(\cos\Theta)^{x-2}(\operatorname{cotg}\Theta)^y d\Theta = \frac{\pi}{2\cos\frac{\pi y}{2}} \cdot \frac{\Gamma(x+y-1)}{\Gamma(x)\Gamma(y)}, \tag{13}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x\Theta)(\cos\Theta)^{x-2}(\operatorname{cotg}\Theta)^y d\Theta = \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi y}{2}} \cdot \frac{\Gamma(x+y-1)}{\Gamma(x)\Gamma(y)}, \tag{14}$$

wo man in (13):

$$\Re(x+y) > 1 \quad \text{und} \quad \Re(y) < 1,$$

in (14):

$$\Re(x+y) > 1 \quad \text{und} \quad \Re(y) < 2$$

annehmen muß.

Die Annahme $y = 1$ liefert wegen (14) die speziellere Formel:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x\Theta)(\cos\Theta)^{x-1}}{\sin\Theta}\,d\Theta = \frac{\pi}{2}, \qquad \Re(x) > 0, \tag{15}$$

welche von Liouville[1]) gefunden worden ist, während die allgemeinen Formeln (13) und (14) von Cauchy[2]) herrühren.

---

1) Journal für Mathematik, Bd. 13, p, 231; 1835.

2) Mémoires sur les intégrales definies prises entre des limites imaginaires; Paris 1825.

Wir setzen ferner in (13) und (14) $x = n + 1$, wo n eine ganze, nicht negative Zahl bedeutet, und führen $1 - x$ statt y ein; dann ergeben sich die beiden spezielleren Integraldarstellungen:

$$(16) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi)^{n-1} \cos(n+1)\varphi (\cot\varphi)^{1-x} d\varphi = \frac{(-1)^n \pi}{2 \sin \frac{\pi x}{2}} \cdot \binom{x-1}{n},$$

$$(17) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi)^{n-1} \sin(n+1)\varphi (\cot\varphi)^{1-x} d\varphi = \frac{(-1)^n \pi}{2 \cos \frac{\pi x}{2}} \cdot \binom{x-1}{n},$$

wo man also $\Re(x) > 0$ bzw. $\Re(x) > -1$ annehmen muß. Aus (16) und (17) findet man endlich die weitere Formel:

$$(18) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi)^{n-1} e^{i(n+1)\varphi} (\cot\varphi)^{1-x} d\varphi = \frac{(-1)^n \pi e^{\frac{i\pi x}{2}}}{\sin \pi x} \cdot \binom{x-1}{n},$$

wo man also $\Re(x) > 0$ annehmen muß.

Wir bemerken noch, daß Schlömilch[1]) die beiden Formeln (13) und (14) durch die Substitution $t = \operatorname{tg}\varphi$ transformiert hat.

§ 65. Methode von Kummer. Die hypergeometrische Reihe.

Kummer[2]) hat eine Methode angegeben, durch welche man gewisse bestimmte Integrale in Reihen entwickeln kann. Ist nämlich:

$$(1) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $\varrho \geqq 1$, und konvergiert außerdem die Reihe:

$$(2) \qquad \frac{a_0}{1^m} + \frac{a_1}{2^m} + \frac{a_2}{3^m} + \frac{a_3}{4^m} + \cdots,$$

wo m eine gewisse reelle und endliche Zahl bedeutet, so ist sicher für $\Re(b) > 0$, $\Re(c) > 0$ und $|x| < \varrho$:

$$\int_0^1 f(tx)(1-t)^{b-1} t^{c-1} dt = \sum_{s=0}^{s=\infty} a_s x^s \cdot \int_0^1 t^{c+s-1} (1-t)^{b-1} dt.$$

Daraus folgt vermöge des ersten *Eulerschen* Integrales:

---

1) Analytische Studien I. p. 15; 1849. Journal für Math., Bd 33, p. 353; 1846. Grunert Archiv, Bd. 6, p. 200; 1845.

2) Journal für Mathematik, Bd. 17, p. 214; 1837.

$$(3)\qquad \int_0^1 f(tx)(1-t)^{b-1}t^{c-1}dt = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{a_s \Gamma(b)\Gamma(c+s)}{\Gamma(b+c+s)} \cdot x^s,$$

und diese Formel bleibt, dem Satz von **Abel** zufolge, noch richtig für $x = \varrho$, vorausgesetzt, daß $\Re(b) \geq m$ wird, wie dies deutlich aus dem Grenzwerte § 21, (2) hervorgeht.

Als eine wichtige Anwendung der Formel (3) führen wir den folgenden Spezialfall:

$$(4)\quad F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \cdot \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-tx)^{-\beta}dt$$

an, wo im allgemeinen:

$$\Re(\alpha) > 0,\ \Re(\gamma-\alpha) > 0,\ |x| < 1$$

vorausgesetzt werden muß.

Für $x = 1$ wird das Integral rechter Hand in (4) mit dem ersten *Eulerschen* identisch; auf diesem Wege hat **Kummer**[1]) eben durch (4) die *Gaußsche* Formel für $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$ hergeleitet.

Aus (4) gewinnt man nach einer einfachen Rechnung den Spezialfall:

$$(5)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 t^{\frac{q}{2}} (1-t)^{-\frac{q+1}{2}} (1-tx^2)^{-\frac{q+1}{2}} dt = \\ \displaystyle\qquad = \Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-q}{2}\right)((1-x)^{-q} - (1+x)^{-q}), \end{cases}$$

welchen **Boncompagni**[2]) bemerkt hat; man muß hier $|x| < 1$ und $-2 < \Re(q) < 1$ annehmen. In ähnlicher Weise findet man die analoge Formel:

$$(6)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 t^q(1-t)^{1-\frac{q}{2}} (1-t^2x^2)^{1-\frac{q}{2}} dt = \\ \displaystyle = \frac{\Gamma\left(\frac{q-5}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{q}{2}\right)}{8x^3\sqrt{\pi}} \left[\frac{1+(q-3)x+x^2}{(1-x)^{q-3}} - \frac{1-(q-3)x+x^2}{(1+x)^{q-3}}\right], \end{cases}$$

wo man $|x| < 1$ und $-1 < \Re(q) < 4$ annehmen muß. Diese Formel rührt von **Ramus**[3]) her.

---

1) Journal für Mathematik, Bd. 15, p. 138ff.

2) Ebenda Bd. 25, p. 74.

3) Oversigter der Kopenhagener Akademie 1844, p. 51; Afhandlinger der Kopenhagener Akademie (4) Bd. 12, p. 151; 1846.

Eine weitere Anwendung von (4) bietet die Formel:

$$(7)\qquad \int_0^1 \frac{t^{x-1}(1-t)^{y-1}}{(t+z)^{x+y}}\,dt = \frac{1}{z^y(1+z)^x}\cdot\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

wo man $\Re(x)>0$, $\Re(y)>0$ annehmen muß, die Annahme $0 \leqq z \leqq -1$ aber auszuschließen ist; in dem Falle $0 > z > -1$ ist überdies $\Re(x+y) < 1$.

Die Formel (4) ist zuerst von Legendre[1]) gefunden worden; sie wird dennoch allgemein Abel[2]) zugeschrieben. Später ist dieselbe Formel von Boncompagni[3]) und in unnötig verwickelter Form von Winckler[4]) hergeleitet worden.

Wir transformieren ferner die Formel (7) durch die Substitution $t = \cos^2\varphi$ und erhalten so:

$$(8)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos\varphi)^{2x-1}(\sin\varphi)^{2y-1}}{(z+\cos^2\varphi)^{x+y}}\,d\varphi = \frac{1}{z^y(1+z)^x}\cdot\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)};$$

indem wir $z+1 = m\alpha$, $z = m\beta$ einführen, folgt daraus:

$$z+\cos^2\varphi = m\alpha - \sin^2\varphi = m\alpha(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) - \sin^2\varphi,$$
$$z+\cos^2\varphi = m\alpha\cos^2\varphi + m\beta\sin^2\varphi,$$

$$(9)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos\varphi)^{2x-1}(\sin\varphi)^{2y-1}}{(\alpha\cos^2\varphi+\beta\sin^2\varphi)^{x+y}}\,d\varphi = \frac{1}{\alpha^x\beta^y}\cdot\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Die letzte Formel verdankt man Schlömilch.[5])

Natürlich kann man auch die allgemeine Formel (3) durch die Transformation $t = \cos^2\varphi$ ändern; in dieser Form ist sie von Schlömilch[6]) und Lobatschewsky[7]) angewendet worden.

§ 66. Transformation von Schlömilch.

Schlömilch[8]) hat eine ebenso einfache wie allgemeine Transformation gefunden, welche nicht selten für die Reduktion be-

1) Exercices sur le calcul intégral, Bd. II, p. 110—112; 1817.
2) Journal für Mathematik, Bd. 2, p. 24; 1827; Werke Bd. I, p. 253.
3) Ebenda Bd. 25, p. 24.
4) Ebenda Bd. 45, p. 102.
5) Kompendium, Bd. II, p. 276; 1879.
6) Ebenda p. 284.
7) Mémoires de Kasan; 1835, 1836.
8) Analytische Studien, Bd. I, p. 83; 1848.

stimmter Integrale von Nutzen sein kann. Es bedeute nämlich $f(x)$ eine Funktion, welche nur der Bedingung genügt, daß das geradlinige Integral:

$$J=\int_0^\infty f\left(\left(cz-\frac{a}{z}\right)^2\right)dz, \tag{1}$$

wo a und c positive Konstanten sind, einen Sinn hat; sonst kann $f(x)$ ganz willkürlich angenommen werden.

Aus der offenbaren Identität:

$$4ac+\left(cz-\frac{a}{z}\right)^2=\left(cz+\frac{a}{z}\right)^2$$

fließt die weitere:

$$\frac{1}{2c}\left(c+\frac{a}{z^2}\right)\left[1+\frac{cz-\frac{a}{z}}{\sqrt{4ac+\left(cz-\frac{a}{z}\right)^2}}\right]=1;$$

somit ergibt sich aus (1):

$$J=\frac{1}{2c}\cdot\int_0^\infty f\left(\left(cz-\frac{a}{z}\right)^2\right)\left(c+\frac{a}{z^2}\right)\cdot\left[1+\frac{cz-\frac{a}{z}}{\sqrt{4ac+\left(cz-\frac{a}{z}\right)^2}}\right]dz. \tag{2}$$

Die Transformation:

$$cz-\frac{a}{z}=t,\quad c+\frac{a}{z^2}=\frac{dt}{dz}$$

ergibt in dieser Fassung:

$$J=\frac{1}{2c}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} f(t^2)\left(1+\frac{t}{\sqrt{4ac+t^2}}\right)dt. \tag{3}$$

Setzt man aber nun in (3):

$$\int_{-\infty}^{+\infty}=\int_{-\infty}^{0}+\int_0^\infty$$

und führt man in das erste Integral rechter Hand $-t$ statt t ein, so ergibt sich schließlich die einfache Formel:

$$J=\frac{1}{c}\cdot\int_0^\infty f(t^2)dt. \tag{4}$$

Als Beispiel wollen wir den Wert des Integrals:

$$U=\int_0^1\frac{t^{x+\frac{1}{2}}(1-t)^{x-\frac{1}{2}}dt}{(a+bt-ct^2)^{x+1}},\quad \Re(x)>-\frac{1}{2} \tag{5}$$

bestimmen, wobei a, c und $a+b-c$ sämtlich positiv sind. Zu dem Ende setzen wir der Kürze halber:

$$h = +\sqrt{a}, \qquad g = +\sqrt{a+b-c} \tag{6}$$

und finden so nach einer einfachen Rechnung:

$$U = \int_0^1 \frac{t^{x+\frac{1}{2}}(1-t)^{x-\frac{1}{2}}\,dt}{[g^2 t + h^2(1-t) + ct(1-t)]^{x+1}}. \tag{7}$$

Durch die Transformation:

$$t = \frac{y^2}{1+y^2}, \quad 1-t = \frac{1}{1+y^2}, \quad \frac{dt}{dy} = \frac{2y}{(1+y^2)^2}$$

erhält man dann nach einigen Reduktionen:

$$U = 2\cdot\int_0^\infty \frac{dy}{\left[\left(gy-\frac{h}{y}\right)^2 + c + (g+h)^2\right]^{x+1}}$$

und daraus mittels (4):

$$U = \frac{2}{g}\cdot\int_0^\infty \frac{dt}{(t^2 + c + (g+h)^2)^{x+1}}.$$

Nach diesen Erörterungen liefert die neue Transformation:

$$t = z\cdot\sqrt{c+(g+h)^2}$$

unter Anwendung von § 53, (5) die gesuchte Formel

$$\int_0^1 \frac{t^{x+\frac{1}{2}}(1-t)^{x-\frac{1}{2}}\,dt}{(a+bt-ct^2)^{x+1}} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(x+1)g[c+(g+h)^2]^{x+\frac{1}{2}}}, \tag{8}$$

wo h und g aus (6) zu bestimmen sind.

Liouville[1]) hat die Formel (8) hergeleitet, ohne Rücksicht auf frühere Arbeiten zu nehmen; man vergleiche die Gegenbemerkungen von Cayley[2]) und Schlömilch.[3])

§ 67. Mehrfache Integräle von Dirichlet und Liouville.

Als ein ziemlich allgemeines Beispiel für die Reduktion mehrfacher Integrale auf Gammafunktionen wollen wir folgenden Satz beweisen:

Es bedeute $f(z)$ eine solche Funktion, daß das n-fache Integral:

$$W_n = \int\int\int\cdots f(t_1+t_2+\cdots+t_n)\,t_1^{x_1-1}t_2^{x_2-1}\cdots t_n^{x_n-1}\,dt_1\,dt_2\cdots dt_n \tag{1}$$

1) Journal de Mathématiques (2), Bd. 1, p. 421—424; 1856.

2) 3) Ebenda (2), Bd. 2, p. 47—55; 1857.

3) Zeitschrift für Math. und Physik, Bd. 2, p. 67—68; 1857.

einen Sinn hat, wenn die Integrationsveränderlichen $t_1, t_2, \cdots, t_n$ sämtlich reell und nicht negativ sind und außerdem der Bedingung:

$$0 \leqq t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_n \leqq h \tag{2}$$

Genüge leisten, wo h eine feste positive Konstante bedeutet, während die Exponenten $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sämtlich einen positiven reellen Teil haben, dann ist allgemein:

$$W_n = \frac{\Gamma(x_1)\Gamma(x_2)\cdots\Gamma(x_n)}{\Gamma(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)} \cdot \int_0^h f(t) \cdot t^{x_1 + x_2 + \cdots + x_n - 1} dt. \tag{3}$$

Wir betrachten zuerst den Fall $n = 2$ und setzen demnach:

$$W_2 = \int_0^h t_1^{x_1 - 1} dt_1 \int_0^{h - t_1} f(t_1 + t_2) t_2^{x_2 - 1} dt. \tag{4}$$

Dieselbe Substitution wie in § 60, d. h.:

$$t_1 = uv, \quad t_2 = u(1 - v)$$

ergibt dann mit derselben Begründung wie vorher ohne Mühe:

$$W_2 = \int_0^h u^{x_1 + x_2 - 1} f(u) du \cdot \int_0^1 v^{x_1 - 1}(1 - v)^{x_2 - 1} dv \tag{5}$$

und somit dem ersten *Eulerschen* Integral zufolge:

$$W_2 = \frac{\Gamma(x_1)\Gamma(x_2)}{\Gamma(x_1 + x_2)} \cdot \int_0^h f(u) u^{x_1 + x_2 - 1} du. \tag{6}$$

Es sei nun die Formel (2) für W_{n-1} richtig, also:

$$W_{n-1} = \frac{\Gamma(x_2)\Gamma(x_3)\cdots\Gamma(x_n)}{\Gamma(x_2 + x_3 + \cdots + x_n)} \cdot \int_0^{h - t_1} f(t_1 + u) u^{x_2 + \cdots + x_n - 1} du, \tag{7}$$

wo wir:

$$0 \leqq t_2 + t_3 + \cdots + t_n \leqq h - t_1$$

annehmen und:

$$W_{n-1} = \int\int\int \cdots f(t_1 + t_2 + \cdots t_n) t_2^{x_2 - 1} t_3^{x_3 - 1} \cdots - t_n^{x_n - 1} dt_2\, dt_3 \cdots dt_n$$

setzen; aus der Definition von W_n folgt dann unmittelbar, daß:

$$W_n = \int_0^h t_1^{x-1} W_{n-1} dt_1$$

sein muß. Daraus folgt wegen (7):

$$(8)\qquad K\cdot W_n = \int_0^h t_1^{x_1-1}\,dt_1 \int_0^{h-t_1} f(t_1+u)\,u^{x_2+\cdots+x_n-1}\,du,$$

wo der Kürze halber:

$$K = \frac{\Gamma(x_2+x_3+\cdots+x_n)}{\Gamma(x_2)\Gamma(x_3)\cdots\Gamma(x_n)}$$

gesetzt worden ist. Dieselbe Methode nun, welche uns von (4) auf (6) geführt hat, führt uns auch von (8) auf (3), und damit ist unser Satz bewiesen.

Setzt man speziell $f(z) = 1$ und $h = 1$, so kann die letzte Integration in (2) ausgeführt werden, und man bekommt die Formel:

$$(9)\int\int\int\cdots t_1^{x_1-1} t_2^{x_2-1}\cdots t_n^{x_n-1}\,dt_1\,dt_2\cdots dt_n = \frac{\Gamma(x_1)\Gamma(x_2)\cdots\Gamma(x_n)}{\Gamma(x_1+x_2+\cdots+x_n+1)},$$

welche von Lejeune-Dirichlet[1]) herrührt, während die allgemeinere Formel (3) später von Liouville[2]) angegeben worden ist.

Die beiden Formeln (3) und (9) können sehr leicht verallgemeinert werden, indem man statt (2) die noch allgemeinere Bedingung:

$$(10)\qquad 0 \leqq \left(\frac{t_1}{a_1}\right)^{m_1} + \left(\frac{t_2}{a_2}\right)^{m_2} + \cdots + \left(\frac{t_n}{a_n}\right)^{m_n} \leqq 1$$

aufstellt; dann findet man durch die Substitutionen:

$$\left(\frac{t_s}{a_s}\right)^{m_s} = u_s, \quad t_s = a_s\cdot u_s^{\frac{1}{m_s}}, \quad \frac{dt_s}{du_s} = \frac{a_s}{m_s}\cdot u_s^{\frac{1}{m_s}-1},$$

daß:

$$0 \leqq u_1 + u_2 + \cdots + u_n \leqq 1$$

sein muß. Daraus folgt wegen (3) für das entsprechende Integral W_n' der Ausdruck:

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} W_n' = \frac{a_1^{x_1} a_2^{x_2}\cdots a_n^{x_n}}{m_1 m_2\cdots m_n}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{x_1}{m_1}\right)\Gamma\left(\frac{x_2}{m_2}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{x_n}{m_n}\right)}{\Gamma\left(\frac{x_1}{m_1}+\frac{x_2}{m_2}+\cdots+\frac{x_n}{m_n}\right)}\cdot \\ \cdot\int_0^1 f(t)\,t^{\frac{x_1}{m_1}+\cdots+\frac{x_n}{m_n}-1}\,dt \end{aligned} \right.$$

1) Comptes rendus, Bd. 8. p. 156—160; 1839. Journal de Mathématiques, Bd. 4, p. 164—168; 1839. Berichte der Berliner Akademie 1839, p. 18—25. Abhandlungen der Berliner Akademie 1839, p. 61—79. Werke Bd. I, p. 375—410.

2) Journal de Mathématiques, Bd. 4, p. 155—160; 1839.

und speziell für $f(z) = 1$:

$$(12) \qquad W_n' = \frac{a_1^{x_1} a_2^{x_2} \cdots a_n^{x_n}}{m_1 m_2 \cdots m_n} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{x_1}{m_1}\right)\Gamma\left(\frac{x_2}{m_2}\right) + \cdots + \Gamma\left(\frac{x_n}{m_n}\right)}{\Gamma\left(\frac{x_1}{m_1} + \frac{x_2}{m_2} + \cdots + \frac{x_n}{m_n} + 1\right)}.$$

Setzt man speziell in (11) $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n = 1$ und $f(t) = (1-t)^\omega$, so wird offenbar:

$$(13) \qquad W_n' = \frac{\Gamma(1+\omega)\Gamma\left(\frac{x_1}{m_1}\right)\Gamma\left(\frac{x_2}{m_2}\right) + \cdots + \Gamma\left(\frac{x_n}{m_n}\right);}{m_1 m_2 \cdots m_n \Gamma\left(1 + \omega + \frac{x_1}{m_1} + \frac{x_2}{m_2} + \cdots + \frac{x_n}{m_n}\right)}.$$

Dies Beispiel rührt von Catalan[1]) her.

Von der Formel (12) ausgehend, hat Lejeune-Dirichlet[2]) die Kubatur des Ellipsoides:

$$(14) \qquad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

und des durch die allgemeine Fläche:

$$(15) \qquad \left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n + \left(\frac{z}{c}\right)^n = 1$$

begrenzten Körpers durchgeführt; für $n = 4$ reduziert sich diese Kubatur auf $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$ oder auf die Rektifikation der Lemniskate.

Kapitel XIII.

Die Funktionen $\Psi(x)$ und $\log \Gamma(x)$.

§ 68. Integrale von Legendre für $\beta(x)$ und $\Psi(x) + C$.

Als Anwendung des in § 50 bewiesenen Satzes über Partialbruchzerlegung eines Integrals $\mathfrak{B}(x)$ wollen wir die Funktion:

$$\beta(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} + \cdots$$

als ein solches Integral darstellen. Die Formeln § 50, (1), (2) liefern unmittelbar für die entsprechende Funktion $\varphi(t)$ den Ausdruck:

$$\varphi(t) = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots = \frac{1}{1+t}, \quad |t| < 1;$$

1) Journal de Mathématiques, Bd. 6, p. 81—84; 1841.

2) Werke Bd. I, p. 400.

daraus folgt die gewünschte Darstellung:

$$(1) \qquad \beta(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt = \int_0^\infty \frac{e^{-tx}}{1+e^{-t}}\,dt, \qquad \Re(x) > 0,$$

die man Legendre[1]) verdankt.

Die Binomialkoeffizientenreihe für $\beta(x)$ läßt sich nun auch ohne Mühe herleiten; ihre Koeffizienten werden indessen nicht sehr elegant.

Als eine weitere Anwendung der Formel (1) können wir vermöge § 5, (14) die Integraldarstellung für $\pi : \sin \pi x$ in § 53, (14) unmittelbar niederschreiben.

Aus (1) findet man ferner durch partielle Integration:

$$\beta(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{x} \cdot \int_0^1 \frac{t^x}{(1+t)^2}\,dt, \qquad \Re(x) > 0$$

und daraus, indem man $t = z^2$ und $\frac{x-1}{2}$ statt x einführt, folgende andere ebenfalls von Legendre[2]) herrührende Formel:

$$(2) \qquad \frac{x-1}{4} \cdot \beta\left(\frac{x-1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \int_0^1 \frac{z^x}{(1+z^2)^2}\,dz, \qquad \Re(x) > -1.$$

Wir gehen nunmehr von der zweiten Formel (1) aus und integrieren von 1 bis x, dann wird vermöge § 5, (17):

$$(3) \qquad \log \pi - \log B\left(\frac{x}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-tx}}{t(1+e^{-t})}\,dt, \qquad \Re(x) > 0.$$

Auch diese Integraldarstellung verdankt man Legendre[3]). Aus (3) findet man für $x = 2$ nach einer einfachen Rechnung, daß:

$$(4) \qquad \log \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{e^t+1}\right) \frac{dt}{te^t}$$

sein muß.

Erinnert man sich der aus § 51, (2) für $x = 2$, $y = 1$ erhaltenen Darstellung:

$$\log 2 = \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\,dt,$$

---

1) Exercices sur le calcul intégral, Bd. II, p. 157; Paris 1817.

2) Ebenda Bd. II, p. 166.

3) Ebenda Bd. II, p. 157.

so fließen aus (3) und (4) nach einigen Reduktionen noch folgende Formeln:

$$\text{(5)}\quad \log B\left(\frac{x}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-2t} - e^{-3t} + e^{-tx}}{t(1+e^{-t})}\, dt, \quad \Re(x) > 0,$$

$$\text{(6)}\quad \log \sqrt{2\pi} = \int_0^\infty \left(\frac{3}{2} - e^{-t} - \frac{1}{1+e^t}\right)\frac{dt}{te^t}.$$

Wir gehen nun zu der mit $\beta(x)$ nahe verwandten Funktion:

$$\Psi(x) + C = \sum_{s=0}^{s=\infty}\left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{x+s}\right)$$

über. Dieselbe Methode wie vorher liefert ohne Mühe die entsprechende Integraldarstellung:

$$\text{(7)}\quad \Psi(x) + C = \int_0^1 \frac{1-t^{x-1}}{1-t}\, dt, \quad \Re(x) > 0,$$

welche man ebenfalls Legendre[1]) verdankt. Aus (7) kann man noch verschiedene andere Formeln herleiten. So findet man mittels § 5, (7) die Integraldarstellung von Euler[2]):

$$\text{(8)}\quad \pi \cot \pi x = \int_0^1 \frac{t^{x-1} - t^{-x}}{1-t}\, dt, \quad 0 < \Re(x) < 1$$

und daraus durch Integration von $\frac{1}{2}$ bis x:

$$\text{(9)}\quad \log \sin \pi x = \int_0^1 \frac{t^{x-1} + t^{-x} - 2\sqrt{t}}{(1-t)\log t}\, dt, \quad 0 < \Re(x) < 1.$$

Als eine Verallgemeinerung von (7) kann man folgende andere Formel:

$$\text{(10)}\quad \Psi(x) - \Psi(x+y) = \int_0^1 \frac{t^{x+y-1} - t^{x-1}}{1-t}\, dt$$

ansehn; sie ist brauchbar, falls $\Re(x) > 0$ und $\Re(x+y) > 0$ angenommen wird.

---

1) Exercices sur le calcul intégral, Bd. II, p. 45; Paris 1817.

2) Miscellanea Berolinensia, Bd. 7, p. 107; 1743. Acta Acad. Petrop. Bd. 5, 1781 I, pp. 32, 36; 1784.

Es bedeute weiter n eine positive ganze Zahl; indem man in (7) statt x der Reihe nach:

$$x,\; x+\frac{1}{n},\; x+\frac{2}{n},\cdots,\; x+\frac{n-1}{n}$$

einführt und die so erhaltenen n Gleichungen addiert, folgt:

$$(11)\quad nC+\sum_{s=0}^{s=n-1}\Psi\left(x+\frac{s}{n}\right)=\int_0^1\left(\frac{n}{1-t}-\frac{t^{x-1}}{1-\sqrt[n]{t}}\right)dt,\qquad \Re(x)>0$$

und daraus unter nochmaliger Anwendung von (7) die von Schaar[1]) herrührende Formel:

$$(12)\quad \sum_{s=0}^{s=n-1}\Psi\left(x+\frac{s}{n}\right)-n\,\Psi(nx)=\int_0^1\left(\frac{nt^{nx-1}}{1-t}-\frac{t^{x-1}}{1-\sqrt[n]{t}}\right)dt,\quad \Re(x)>0;$$

setzt man ferner in (11) $t=z^n$, so ergibt sich die Formel:

$$(13)\quad C+\frac{1}{n}\cdot\sum_{s=0}^{s=n-1}\Psi\left(x+\frac{s}{n}\right)=\int_0^1\left(\frac{nz^{n-1}}{1-z^n}-\frac{z^{nx-1}}{1-z}\right)dz,\qquad \Re(x)>0,$$

welche von Arndt[2]) und Schlömilch[3]) angegeben worden ist.

Der Zusammenhang zwischen den Formeln (12) und (13) und dem Multiplikationstheoreme für $\Psi(x)$ liegt auf der Hand; wir wollen indessen nicht näher darauf eingehen, weil wir in § 76 dasselbe Multiplikationstheorem zu verallgemeinern haben.

Eine Anwendung der allgemeinen Formel § 49, (4) ergibt endlich für $\Psi(x)+C$ folgende Binomialkoeffizientenreihe:

$$(14)\qquad \Psi(x)+C=\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s}{s+1}\cdot\binom{x-1}{s+1},\qquad \Re(x)>0,$$

welche man Stern[4]) verdankt.

Setzt man endlich in (1) und (7) $x=\frac{p}{q}$, wo $\frac{p}{q}$ einen positiven echten irreduziblen Bruch bezeichnet, so ist die Herleitung der Sätze des § 7 auf eine elementare Aufgabe der Integralrechnung reduziert; dies ist für $\Psi\left(\frac{p}{q}\right)+C$ von Lebesgue[5]) bemerkt worden.

---

1) Mémoires Couronnés de Bruxelles Bd. 22, p. 15—16; 1846 (1848).
2) Grunert Archiv, Bd. 10, p. 253; 1847.
3) Analytische Studien, Bd. I, p. 36; 1847.
4) Zur Theorie der Eulerschen Integrale, p. 39. Göttinger Studien 1847.
5) Journal de Mathématiques (2) Bd. 1, p. 377—378; 1856.

§ 69. Die Derivierten von $\Gamma(x)$ und $B(x, y)$.

Es leuchtet ein, daß die Integraldarstellungen, welche wir in den drei vorhergehenden Kapiteln entwickelt haben, eine große Menge ähnlicher Formeln liefern, wenn wir sie nach einer der Veränderlichen x oder y differentiieren. Wir wollen hier einzelne dieser Formeln entwickeln.

Gehen wir von dem ersten *Eulerschen* Integrale:

$$(1) \qquad \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt, \quad \Re(x) > 0,\ \Re(y) > 0$$

aus, so ergibt die Differentiation nach x wegen § 5, (10):

$$(2) \qquad \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\left(\Psi(x) - \Psi(x+y)\right) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\log t\,dt;$$

daraus folgt unter Anwendung von § 68, (10) die Formel:

$$(3) \qquad \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt \cdot \int_0^1 \frac{t^{x+y-1} - t^{x-1}}{1-t}\,dt = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\log t\,dt,$$

welche von Euler[1]) herrührt und recht häufig in der Literatur über $\Gamma(x)$ aus der ersten Hälfte des vorigen Jahrhunderts vorkommt; wir erwähnen z. B. Arbeiten von Legendre[2]) und Cauchy.[3])

Weiter setzen wir in (2) $x = 1$ und führen hinwiederum x statt y ein, dann ergibt eine einfache Transformation des so erhaltenen Integrals die von Abel[4]) herrührende Formel

$$(4) \qquad \int_0^1 t^{x-1}\log(1-t)\,dt = -\frac{C + \Psi(x+1)}{x}, \quad \Re(x) > 0;$$

nun ist aber ebenfalls für $\Re(x) > 0$:

$$-\frac{1}{x^2} = \int_0^1 t^{x-1} \cdot \log t\,dt;$$

---

1) Acta Acad. Petrop. 1777 II, p. 15; 1780. Institutiones calculi integralis, Bd. IV, p. 166; 1794.

2) Mémoires de l'Institut de France 1809, p. 457. Exercices, Bd. I, p. 259; 1811. Traité, Bd. II, p. 390; 1826.

3) Journal de l'École Polytechnique, cahier 28, p. 193; 1841.

4) Werke Bd. II, p. 8.

somit ergibt sich aus (4) die andere Integraldarstellung:

$$(5)\qquad -\frac{C+\Psi(x)}{x} = \int_0^1 t^{x-1} \log\left(\frac{1}{t}-1\right) dt, \quad \Re(x) > 0.$$

Schlömilch[1]) und Lindman[2]) haben in ähnlicher Weise die Formeln § 53, (4) bzw. (5) nach x differentiiert und dann $x = 1$ bzw. $x = \frac{1}{2}$ gesetzt; dies Verfahren liefert offenbar Relationen, welche mit (4) und (5) zusammenfallen.

Betreffs des zweiten *Eulerschen* Integrals gehen wir von § 61, (7) d. h. von der Formel:

$$\int_0^\infty e^{-ty} t^{x-1} dt = y^{-x} \cdot \Gamma(x), \quad \Re(x) > 0,\ \Re(y) > 0$$

aus, aus der die weitere Formel:

$$(6)\qquad \int_0^\infty e^{-yt} t^{x-1} \log t\, dt = \frac{\Gamma(x)}{y^x} (\Psi(x) - \log y),$$

folgt, die von Cauchy[3]) herrührt. Weiter setzen wir in (6) $y = 1$ und $x + 1$ statt x; die Differenzengleichung für $\Psi(x)$ ergibt dann die folgende Integraldarstellung:

$$(7)\qquad \Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}(t-x) t^{x-1} \log t\, dt, \quad \Re(x) > 0,$$

welche man ebenfalls Cauchy[4]) verdankt. Aus (6) findet man ferner für $x = y = 1$, und indem man $t = -\log z$ einführt, folgende Formel für die Eulersche Konstante:

$$(8)\qquad C = \int_0^1 \log\left(\log \frac{1}{z}\right) dz,$$

welche von Malmstén[5]) bemerkt worden ist.

Eine weitere Integraldarstellung für C kann aus § 62, (5):

$$\int_0^\infty \sin(tb) t^{x-1} dt = \frac{\Gamma(x) \sin \frac{\pi x}{2}}{b^x} = \frac{\pi}{2 b^x \Gamma(1-x) \cos \frac{\pi x}{2}}, \quad \Re(x) > -1$$

---

1) Beiträge p. 76—85; 1843.

2) Grunert Archiv, Bd. 16, p. 94—103; 1851.

3) 4) Journal de l'École Polytechnique, cahier 28, p. 147; 1841.

5) Journal für Mathematik, Bd. 38, p. 1—39; 1849.

hergeleitet werden; eine Differentiation nach x ergibt nämlich, wenn man darnach $x = 0$ setzt:

$$(9) \qquad -\frac{\pi}{2}(C + \log b) = \int_0^\infty \frac{\sin(tb)}{t} \log t\, dt.$$

Diese Formel rührt von Arndt[1]) her.

Endlich gehen wir von § 64, (14):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x\varphi)(\cos\varphi)^{x-2}(\operatorname{cotg}\varphi)^y d\varphi = \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi y}{2}} \cdot \frac{\Gamma(x+y-1)}{\Gamma(x)\Gamma(y)}$$

aus; eine Differentiation nach y liefert dann, wenn man $y = 1$ setzt die von Lindman[2]) herrührende Formel:

$$(10) \qquad \frac{\pi}{2}(\Psi(x) + C) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos\varphi)^{x-1}\sin(x\varphi)}{\sin\varphi} \log \operatorname{tg}\varphi\, d\varphi,$$

welche für $\Re(x) > 0$ anwendbar ist.

§ 70. Integraldarstellungen erster Gattung für $\mu(x)$ und $\nu(x)$.

Um mittels der Formeln des § 68 einen Integralausdruck für die Funktion $\Psi(x)$ selbst und dadurch auch für $\log \Gamma(x)$ zu erhalten, haben wir vor allem die *Eulersche* Konstante als bestimmtes Integral darzustellen; wir ziehen es indessen vor, eine viel allgemeinere Aufgabe zu lösen, indem wir Integraldarstellungen für die beiden Funktionen:

$$\nu(x) = \log x - \Psi(x),$$
$$\mu(x) = \log \Gamma(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)\log x + x - \log\sqrt{2\pi}$$

herleiten wollen.

Eine erste Gattung solcher Darstellungen liefern die in § 33, (9) und § 34, (6) gegebenen Reihenentwicklungen:

$$(1) \qquad \nu(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty}\left(\frac{1}{x+s} - \log\left(1 + \frac{1}{x+s}\right)\right),$$

$$(2) \qquad \mu(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty}\left[\left(x + s + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{1}{x+s}\right) - 1\right],$$

1) Grunert Archiv, Bd. 11, p. 70; 1848.

2) Handlinger der Stockholmer Akademie, 1850, II.

indem wir das allgemeine Glied dieser Reihen als bestimmtes Integral darstellen und dann die Summen dieser Ausdrücke bilden.

Gehen wir erstens von den in § 51, (1), (2) gegebenen Formeln für $\frac{1}{x}$ und $\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$ aus:

$$\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-tx} dt, \quad \Re(x) > 0,$$

$$\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \int_0^\infty \frac{1-e^{-t}}{t} \cdot e^{-tx} dt, \quad \Re(x) > 0,$$

so folgt daraus unmittelbar die Integraldarstellung:

$$(3) \qquad \frac{1}{x} - \log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \int_0^\infty \left(1 - \frac{1-e^{-t}}{t}\right) e^{-tx} dt, \quad \Re(x) > 0.$$

Nun hat die in (3) vorkommende zu integrierende Funktion offenbar eine einfache Nullstelle in $t = 0$; die Funktion linker Hand in (3) ist daher summierbar, und die allgemeine Formel § 48, (4) liefert unmittelbar das gewünschte Resultat:

$$(4) \qquad \nu(x) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + 1\right) e^{-tx} dt, \quad \Re(x) > 0,$$

welches man Binet[1]) verdankt.

Aus den Definitionen für $\mu(x)$ und $\nu(x)$ folgt aber die Identität:

$$(5) \qquad \mu^{(1)}(x) = \frac{1}{2x} - \nu(x).$$

Da nun vermöge (4):

$$\frac{1}{2x} - \nu(x) = -\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right) e^{-tx} dt, \quad \Re(x) > 0$$

sein muß, so ergibt eine Integration nach x:

$$(6) \qquad \mu(x) + K = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right) \frac{e^{-tx} dt}{t}, \quad \Re(x) > 0;$$

denn die unbestimmte Integration nach x ist erlaubt, weil die zu integrierende Funktion eine Nullstelle in $t = 0$ hat. Um nun

1) Journal de l'École Polytechnique, cahier 27, p. 243; 1839.

den Wert von K zu bestimmen, setzen wir zuerst in (6) $x = 1$, woraus:

$$(7) \qquad 1 - \log\sqrt{2\pi} + K = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right)\frac{dt}{te^t}$$

folgt, während die Annahme $x = \frac{1}{2}$ in ähnlicher Weise:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log 2 + K = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right) \cdot e^{-\frac{t}{2}} \cdot \frac{dt}{t}$$

ergibt. Daraus folgt, indem man $2t$ statt t einführt:

$$(8) \qquad 1 - \log 2 + 2K = \int_0^\infty \left(\frac{2}{e^{2t} - 1} - \frac{1}{t} + 1\right)\frac{dt}{te^t}.$$

Die Subtraktion von (7) und (8) ergibt indessen vermöge § 68, (4) nach einer einfachen Rechnung $K = 0$. Damit haben wir folgende andere Formel von Binet[1]):

$$(9) \qquad \mu(x) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right)\frac{e^{-tx}}{t}\,dt, \quad \Re(x) > 0$$

gefunden.

Andere Integraldarstellungen für $\mu(x)$ und $\nu(x)$ können folgendermaßen hergeleitet werden.

Aus der Identität:

$$\frac{\frac{1}{2} - t}{t + x} = \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)}{t + x} - 1$$

folgt unmittelbar die andere:

$$(10) \qquad \int_0^1 \frac{\frac{1}{2} - t}{t + x}\,dt = \left(x + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1$$

und daraus durch Differentiation nach x:

$$(11) \qquad \int_0^1 \frac{\frac{1}{2} - t}{(t + x)^2}\,dt = \frac{1}{x} - \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2x(x+1)},$$

---

1) Journal de l'École Polytechnique, cahier 27, p. 240; 1839.

endlich ergibt eine partielle Integration wegen (10) und (11) die ähnlichen Darstellungen:

$$\frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \frac{t-t^2}{(t+x)^2} dt = \left(x+\frac{1}{2}\right) \log\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1, \tag{12}$$

$$\int_0^1 \frac{t-t^2}{(t+x)^3} dt = \frac{1}{x} - \log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2x(x+1)}. \tag{13}$$

Setzt man noch in den vier letzten Formeln statt x der Reihe nach:

$$x+1,\ x+2,\ x+3, \cdots$$

und nimmt die Summe aller so erhaltenen Gleichungen, so ergeben sich offenbar Integraldarstellungen der Funktionen $\mu(x)$ und $\nu(x)$; aus den Formeln:

$$\Psi(x) = -C - \sum_{s=0}^{s=\infty} \left(\frac{1}{x+s} - \frac{1}{s+1}\right),$$

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{1}{(x+s)(x+s+1)} = \frac{1}{x}$$

findet man erstens wegen (12) und (13):

$$\mu(x) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 (t-t^2) \cdot \Psi^{(1)}(t+x)\, dt, \tag{14}$$

$$\frac{1}{2x} - \nu(x) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 (t-t^2)\, \Psi^{(2)}(t+x)\, dt; \tag{15}$$

die Formel (14) rührt von Hermite[1]) her; in ähnlicher Weise findet man aus (10) und (11):

$$\mu(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}-t}{t+x+s} dt, \tag{16}$$

$$\nu(x) = \frac{1}{2x} + \sum_{s=0}^{s=\infty} \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}-t}{(t+x+s)^2} dt. \tag{17}$$

Die beiden letzten Formeln können indessen in sehr eleganter

1) American Journal, Bd. 17, p. 7; 1895.

Weise umgestaltet werden; aus der gewöhnlichen logarithmischen Reihe findet man nämlich für $0 < \theta < 2\pi$:

$$-\log(1 - e^{-i\theta}) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\cos(s\theta) - i \sin(s\theta)}{s},$$

woraus durch Trennung der reellen und der imaginären Komponenten:

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(\sin s\theta)}{s}, \quad 0 < \theta < 2\pi$$

folgt; setzt man daher allgemein:

$$A(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin(2n\pi x)}{n\pi} \tag{18}$$

und bezeichnet $[x]$ die größte ganze Zahl, welche für $x > 0$ die Ungleichung $[x] \leqq x$ befriedigt, dann ist:

$$A(x) = \frac{1}{2} - x + [x], \quad A(x+1) = A(x); \tag{19}$$

somit findet man aus (10) und (11) die beiden weiteren Integraldarstellungen:

$$\mu(x) = \int_0^\infty \frac{A(t)}{t+x} dt, \tag{20}$$

$$\nu(x) - \frac{1}{2x} = \int_0^\infty \frac{A(t)}{(t+x)^2} dt; \tag{21}$$

nach Stiltjes[1]) rührt die Formel (20) von Bourguet her; dies ist aber nicht zutreffend, weil sie schon früher von Gilbert[2]) publiziert worden ist.

Es leuchtet ein, daß die beiden Formeln (20) und (21) für *reelle, nicht positive* x keinen Sinn haben, sonst aber für einen willkürlichen Wert von x anwendbar sind.

Wir wollen von der Formel § 39, (9) hier noch eine Anwendung zeigen; aus:

$$\nu(x) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \beta(2^s x)$$

folgt nämlich unmittelbar wegen § 68, (1):

---

1) Journal de Mathématiques, (4) Bd. 5, p. 432; 1889.

2) Recherches sur le développement de la fonction Γ, p. 12. Académie de Belgiques, Bd. 41; 1875.

$$(22)\qquad \nu(x) = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)t}(t^{2x} + t^{4x} + t^{8x} + t^{16x} + \cdots)dt, \qquad \Re(x) > 0;$$

nun ist aber:

$$\frac{1}{(1+t)t} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t},$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1;$$

somit findet man aus (22):

$$(23)\qquad \nu(x) = \frac{1}{x} - \int_0^1 \frac{dt}{1+t}(t^{2x} + t^{4x} + t^{8x} + t^{16x} + \cdots)dt, \qquad \Re(x) > 0$$

und daraus durch Integration von 1 bis x und unter Anwendung der Identitäten:

$$\mu^{(1)}(x) = \frac{1}{2x} - \nu(x), \quad \mu(1) = 1 - \log\sqrt{2\pi}$$

die weitere Darstellung:

$$\mu(x) - 1 + \log\sqrt{2\pi x} = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)\log t}\left(\frac{t^{2x}-t^2}{2} + \frac{t^{4x}-t^4}{4} + \frac{t^{8x}-t^8}{8} + \cdots\right);$$

somit ergibt die Annahme $x = \frac{1}{2}$ wegen § 34, (13):

$$(24)\qquad 1 - \log\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)\log t}\left(-t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} + \frac{t^8}{8} + \frac{t^{16}}{16} + \cdots\right);$$

daraus ergibt sich endlich durch Addition der beiden letzten Gleichungen die gesuchte Formel:

$$(25)\qquad \mu(x) = \log\sqrt{\frac{\pi}{8x}} + \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)\log t}\left(-t + \frac{t^{2x}}{2} + \frac{t^{4x}}{4} + \frac{t^{8x}}{8} + \cdots\right),$$

welche man Catalan[1]) verdankt.

Aus (23) findet man weiter für $x = 1$ die (24) ähnliche Integralformel für die *Eulersche* Konstante:

$$(26)\qquad C = 1 - \int_0^1 \frac{dt}{1+t}(t^2 + t^4 + t^8 + t^{16} + \cdots),$$

welche ebenfalls von Catalan[2]) gefunden worden ist.

1) Journal de Mathématiques, (3) Bd. 1, p. 226; 1875.

2) loc. cit. p. 215.

§ 71. Integraldarstellungen zweiter Gattung für $\mu(x)$ und $\nu(x)$.

Die Integraldarstellungen § 70, (4), (9):

$$\nu(x) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + 1 \right) e^{-tx} dt, \qquad \Re(x) > 0 \tag{1}$$

$$\mu(x) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right) \frac{e^{-tx}}{t} dt, \qquad \Re(x) > 0 \tag{2}$$

und § 68, (1):

$$\beta(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-tx}}{1 + e^{-t}} dt, \qquad \Re(x) > 0 \tag{3}$$

lassen sich auf andere Formen bringen, welche in der Tat sehr interessant sind.

Zu dem Ende setzen wir in der bekannten Entwicklung:

$$\pi \cot \pi x = \pi i \cdot \frac{e^{\pi x i} + e^{-\pi x i}}{e^{\pi x i} - e^{-\pi x i}} = \frac{1}{x} + 2x \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{x^2 - s^2}, \tag{4}$$

welche als eine unmittelbare Folgerung von § 5, (2), (7) anzusehen ist:

$$x = \frac{t}{2\pi i};$$

wir erhalten somit nach einer einfachen Rechnung die weitere Formel von Euler[1]):

$$\frac{1}{2t}\left[\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right] = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{t^2 + 4s^2\pi^2}$$

und daraus wegen (1):

$$\mu(x) = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + \cdots, \tag{5}$$

wo der Kürze halber:

$$J_n = 2 \cdot \int_0^\infty \frac{e^{-tx}}{t^2 + 4n^2\pi^2} dt$$

gesetzt worden ist.

Nun ergibt die Substitution $t = 2n\pi z$ ohne weiteres:

$$J_n = \frac{1}{n\pi} \cdot \int_0^\infty \frac{e^{-2n\pi x z}}{1 + z^2} dz;$$

daraus aber folgt wegen (5) für $\mu(x)$ die Integraldarstellung:

1) Introductio in Analysin infinitorum § 183.

$$(6) \qquad \mu(x) = -\frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\infty \frac{\log\left(1-e^{-2\pi t x}\right)}{1+t^2}\, dt, \qquad \Re(x) > 0$$

und daraus durch partielle Integration die ähnliche Formel:

$$(7) \qquad \mu(x) = 2x \cdot \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} t}{e^{2\pi t x}-1}\, dt, \qquad \Re(x) > 0,$$

während die Identität:

$$\nu(x) = \frac{1}{2x} - \mu^{(1)}(x)$$

wegen (6) für $\nu(x)$ die entsprechende Darstellung:

$$(8) \qquad \nu(x) = \frac{1}{2x} + 2 \cdot \int_0^\infty \frac{t\,dt}{(t^2+1)(e^{2\pi t x}-1)}, \qquad \Re(x) > 0$$

liefert.

Aus der zu (4) analogen Entwicklung für $\pi : \cos \pi x$ findet man weiter:

$$\frac{1}{e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}} = 2\pi \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s(2s+1)}{t^2+(2s+1)^2\pi^2}$$

und daraus wegen (3) noch folgende Integraldarstellung:

$$(9) \qquad \frac{1}{2} \cdot \beta\left(x+\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{1}{e^{\pi t x}+e^{-\pi t x}} \cdot \frac{dt}{t^2+1}, \qquad \Re(x) > 0.$$

Die drei eben entwickelten Formeln (6), (8), (9) haben also sämtlich einen Sinn für $\Re(x) > 0$; unter derselben Voraussetzung findet man mittels der Transformation $tx = z$:

$$(10) \quad \mu(x) = -\frac{x}{\pi} \cdot \int_0^\infty \frac{\log\left(1-e^{-2\pi z}\right)}{z^2+x^2}\, dz = 2 \cdot \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{z}{x}\right)}{e^{2\pi z}-1}\, dt,$$

$$(11) \quad \nu(x) = \frac{1}{2x} + 2\int_0^\infty \frac{z\,dz}{(z^2+x^2)\left(e^{2\pi z}-1\right)},$$

$$(12) \quad \frac{1}{2x} \cdot \beta\left(x+\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{1}{e^{\pi z}+e^{-\pi z}} \cdot \frac{dz}{z^2+x^2};$$

denn diese Formeln sind für *positive, reelle* x sicher richtig, und beide Seiten dieser Identitäten sind analytische Funktionen in x, wenn nur $\Re(x) > 0$ vorausgesetzt wird. Die Formel (12) ist von

Legendre[1]), (11) von Poisson[2]), die letzte Formel (10) von Binet[3]) und die erste Formel (10) von Schaar[4]) gefunden worden.

Wir wollen noch den Wert der beiden anderen Integrale

$$f(x) = 2 \cdot \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{z}{x}\right)}{e^{2\pi z}+1}\, dz, \quad g(x) = 2 \cdot \int_0^\infty \frac{z\,dz}{(z^2+x^2)(e^{2\pi z}+1)},$$

bestimmen; eine einfache Rechnung ergibt:

$$\mu(x) - f(x) = 4 \cdot \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{z}{x}\right)}{e^{4\pi z}-1}\, dz = 2 \cdot \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{2x}\right)}{e^{2\pi t}-1}\, dt,$$

$$\nu(x) - g(x) = \frac{1}{2x} + 4 \cdot \int_0^\infty \frac{z\,dz}{(z^2+x^2)(e^{4\pi z}-1)} =$$

$$= \frac{1}{2x} + 4 \cdot \int_0^\infty \frac{t\,dt}{(t^2+4x^2)(e^{2\pi t}-1)}.$$

Daraus erhält man die gesuchten Werte:

$$\mu(x) - \mu(2x) = 2 \cdot \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{x}\right)}{e^{2\pi t}+1}\, dt = \frac{x}{\pi} \cdot \int_0^\infty \frac{\log\left(1+e^{-2\pi t}\right)}{t^2+x^2}\, dt, \tag{13}$$

$$\nu(x) - 2\nu(2x) = 2 \cdot \int_0^\infty \frac{t\,dt}{(t^2+x^2)(e^{2\pi t}+1)}. \tag{14}$$

Die Formeln (10) bis (14), welche also sämtlich für $\Re(x) > 0$ anwendbar sind, bieten eine interessante Eigentümlichkeit dar. In der Tat konvergieren die entsprechenden Integrale sämtlich offenbar auch für $\Re(x) < 0$, während sie für $\Re(x) = 0$ sinnlos werden.

Petersen[5]) hat diese Verhältnisse für (11) aufgeklärt, indem er gezeigt hat, daß das betreffende Integral für $\Re(x) \gtrless 0$ verschiedene Funktionen darstellt; durch Anwendung seiner allgemeinen Darstellung der Eulerschen Summenformel[6]) findet Petersen nämlich, daß allgemein:

---

1) Exercices sur le calcul intégral; 5, 50.

2) Mémoires de l'Institut de France; 1811, p. 221.

3) Journal de l'École Polytechnique, cahier 27, p. 243; 1839.

4) Mémoires Couronnés de Bruxelles, Bd. 22, p. 6; 1846.

5) Vorlesungen über Funktionentheorie, p. 232; Kopenhagen 1898.

6) loc. cit. p. 164.

$$(15)\quad \nu(x) = \frac{1}{2x} + 2\cdot\int_0^\infty \frac{t\,dt}{(t^2+x^2)(e^{2\pi t}-1)} - \begin{cases} 0, & \Re(x) > 0, \\ \dfrac{2\pi i}{e^{-2\pi x i}-1}, & \Re(x) < 0 \end{cases}$$

sein muß, und es leuchtet ein, daß man die übrigen obengenannten Integrale in ähnlicher Weise behandeln kann.

Das Ergebnis von Petersen ist in der Tat sehr interessant, weil die betreffenden Integrale in den zwei Halbebenen *verschiedene* Funktionen darstellen, welche beide für sich in der ganzen x-Ebene analytisch fortgesetzt werden können.

§ 72. Die Funktion $\Psi(x)$.

Nachdem wir die Integraldarstellung § 70, (4) für $\nu(x)$:

$$\nu(x) = \log x - \Psi(x) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + 1\right) e^{-tx}\,dt, \qquad \Re(x) > 0$$

gefunden haben, ist es sehr leicht, die Funktion $\Psi(x)$ selbst als bestimmtes Integral auszudrücken; es bleibt uns nämlich nur übrig, die Funktion $\log x$ mittels § 51, (2) zu eliminieren; da nun:

$$\log x = \int_0^1 \frac{e^{-t} - e^{-tx}}{t}\,dt, \qquad \Re(x) > 0$$

ist, so ergibt sich ohne weiteres die gewünschte Integralformel:

$$(1)\qquad \Psi(x) = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-tx}}{1-e^{-t}}\right) dt, \qquad \Re(x) > 0,$$

welche von Gauß[1]) herrührt; für $x = 1$ folgt aus (1) für die Eulersche Konstante der Ausdruck:

$$(2)\qquad C = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^t} - \frac{1}{te^t}\right) dt,$$

welchen man Euler[2]) verdankt.

Aus (1) findet man, wenn n eine positive ganze Zahl bedeutet, ohne Mühe, daß:

---

1) Comment. Gotting. Bd. 2, p. 41; 1812. Werke, Bd. III, p. 159. Deutsche Ausgabe, p. 49.

2) Novi Commentarii Acad. Petrop. Bd. 14, p. 155; (1769) 1770. Acta Acad. Petrop. 1781 I, p. 78; 1784.

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} \Psi\left(x+\frac{s}{n}\right) = \int_0^\infty \left(\frac{ne^{-t}}{t} - \frac{e^{-tx}}{1-e^{-\frac{t}{n}}}\right) dt, \qquad \Re(x) > 0$$

sein muß; daraus folgt, indem man $t = -n \log z$ einführt, die von Arndt[1]) gefundene Formel:

$$-\frac{1}{n} \cdot \sum_{s=0}^{s=n-1} \Psi\left(x+\frac{s}{n}\right) = \int_0^1 \left(\frac{z^{n-1}}{\log z} + \frac{z^{nx-1}}{1-z}\right) dt, \qquad \Re(x) > 0.$$

Der Zusammenhang zwischen (3) und der Gaußschen Multiplikationsformel für $\Psi(x)$ liegt auf der Hand.

Eine andere Integraldarstellung für $\Psi(x)$ kann aus der Identität:

$$(4) \qquad \Gamma^{(1)}(x) = \Gamma(x) \cdot \Psi(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \log t dt, \qquad \Re(x) > 0$$

hergeleitet werden. Zu dem Ende führen wir in (4) statt $\log t$ den aus § 51, (2) gebildeten Integralausdruck ein, dann ergibt sich:

$$(5) \qquad \Gamma(x) \cdot \Psi(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \left[\int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-tz}}{z} dz\right];$$

denken wir uns nun für einen Augenblick x *positiv*, so dürfen wir die Integrationsfolge in (5) vertauschen[2]), und es wird:

$$(6) \qquad \Gamma(x) \cdot \Psi(x) = \int_0^\infty \frac{dz}{z} \left[e^{-z} \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt - \int_0^\infty e^{-(1+z)t} t^{x-1} dt\right];$$

nun ist aber:

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = \Gamma(x), \qquad \int_0^\infty e^{-(1+z)t} t^{x-1} dt = (1+z)^{-x} \cdot \Gamma(x),$$

also folgt aus (6) die von Lejeune-Dirichlet[3]) gefundene Integraldarstellung:

$$(7) \qquad \Psi(x) = \int_0^\infty \left(e^{-t} - (1+t)^{-x}\right) \frac{dt}{t},$$

---

1) Grunert Archiv, Bd. 10, p. 253; 1847.

2) Stolz, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung, Bd. III, p. 183.

3) Journal für Mathematik, Bd. 15, p. 258—263; 1836. Werke, Bd. I, p. 275.

welche offenbar für $\Re(x) > 0$ anwendbar ist; denn in diesem Falle sind die Funktionen der beiden Seiten in (7) in x analytische Funktionen, die, wie wir gesehen haben, für *positive* x identisch sind.

Aus (7) findet man erstens für $x = 1$ folgende Integraldarstellung der Eulerschen Konstante:

$$C = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+t} - e^{-t}\right) \frac{dt}{t}, \tag{8}$$

zweitens die Formel:

$$\Psi(x) - \Psi(y) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{(1+t)^y} - \frac{1}{(1+t)^x}\right) \frac{dt}{t}, \tag{9}$$

welche für $\Re(x) > 0$ und $\Re(y) > 0$ anwendbar ist; setzt man noch in (9) $t = \frac{1}{z}$, so ergibt sich die Formel:

$$\Psi(x) - \Psi(y) = \int_0^\infty \left(\frac{z^{y-1}}{(1+z)^y} - \frac{z^{x-1}}{(1+z)^x}\right) dz, \tag{10}$$

welche von Legendre[1]) herrührt, während Schlömilch[2]) die Formel (9) angegeben hat.

Dirichlet[3]) hat dann die Integraldarstellung (7) durch die Transformation $1 + z = 1 : t$ umgestaltet; man findet nach einer einfachen Rechnung die Formel:

$$\Psi(x) = \int_0^1 \left(e^{1-\frac{1}{t}} - t^x\right) \frac{dt}{t(1-t)}, \qquad \Re(x) > 0. \tag{11}$$

§ 73. Die Funktion log $\Gamma(x)$.

Nachdem wir die vorhergehenden Integraldarstellungen für $\Psi(x)$ gefunden haben, ist es sehr leicht, entsprechende Formeln für log $\Gamma(x)$ zu finden; denn die gewöhnlichen Überlegungen[4]) zeigen, daß es erlaubt ist, unter dem Integralzeichen nach x zu integrieren.

---

1) Exercices sur le calcul intégral, Bd. II, p. 107; Paris 1817.

2) Beiträge, p. 78; 1843, Studien I, p. 35; 1848. Grunert Archiv, Bd. 9, p. 8; 1847.

3) Journal für Mathematik, Bd. 15, p. 258—263; 1836; Werke, Bd. I, p. 275.

4) Stolz, Grundzüge, Bd. III, p. 18.

Gehen wir erstens von § 72, (7) aus, so ergibt die Integration von 1 bis x unmittelbar die von Féaux[1]) herrührende Formel:

$$(1)\quad \log\Gamma(x)=\int_0^\infty\left[(x-1)e^{-t}+\frac{(1+t)^{-x}-(1+t)^{-1}}{\log(1+t)}\right]\frac{dt}{t},\quad \Re(x)>0.$$

Aus § 72, (9) kann man eine ähnliche Darstellung herleiten. Die Integration von 1 bis x ergibt in der Tat, nachdem man zuerst $x+y$ statt y eingeführt hat:

$$(2)\quad \log\Gamma(x)-\log\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(y+1)}=\int_0^\infty\left(\frac{1}{(1+t)^y}-1\right)\frac{(1+t)^{-1}-(1+t)^{-x}}{\log(1+t)}\,dt;$$

weiter hat man offenbar:

$$(3)\qquad \log(1+y)=\int_0^\infty\frac{(1+t)^{-2}-(1+t)^{-y-2}}{\log(1+t)}\,dt,$$

denn eine Differentiation nach y führt auf eine offenbare Identität zurück, und die beiden Seiten verschwinden für $y=0$; aus (2) und (3) findet man aber offenbar:

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\log\Gamma(x)-\log\left(\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(y+1)(y+1)^{x-1}}\right)=\\ &=\int_0^\infty\left(\frac{x-1}{(1+t)^2}+\frac{(1+t)^{-x}-(1+t)^{-1}}{t}\right)\frac{dt}{\log(1+t)}+\\ &+\int_0^\infty\left[\frac{(1+t)^{-x}-(1+t)^{-1}}{t\log(1+t)}-\frac{x-1}{(1+t)^2}\right]\frac{dt}{(1+t)^y}.\end{aligned}\right.$$

Läßt man nun in (4) $\Re(y)$ über jede Grenze hinauswachsen, so folgt wegen des Grenzwertes § 38, (4) die Formel:

$$(5)\quad \log\Gamma(x)=\int_0^\infty\left(\frac{x-1}{(1+t)^2}+\frac{(1+t)^{-x}-(1+t)^{-1}}{t}\right)\frac{dt}{\log(1+t)},$$

welche man Féaux[2]) verdankt; aus (4) findet man demnach mittels (5) die weitere Integraldarstelluag:

$$(6)\ \log\left(\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(y+1)(y+1)^{x-1}}\right)=\int_0^\infty\left[\frac{x-1}{(1+t)^2}+\frac{(1+t)^{-1}-(1+t)^{-x}}{t\log(1+t)}\right]\frac{dt}{(1+t)^y};$$

in (5) muß man $\Re(x)>0$, in (6) $\Re(x+y)>0$, $\Re(y)>-1$ annehmen.

1) De functione quae littera Γ obsignatur etc. Münster 1844.

2) loc. cit.

Wir gehen nunmehr von § 72, (1) aus und finden durch dieselbe Methode für $\log \Gamma(x)$ unmittelbar folgende Integraldarstellung:

$$\log \Gamma(x) = \int_0^\infty \left((x-1)e^{-t} + \frac{e^{-tx} - e^{-t}}{1 - e^{-t}}\right)\frac{dt}{t}, \quad \Re(x) > 0, \tag{7}$$

welche man Plana[1]) verdankt; sie ist später von Binet[2]) wiedergefunden, wird aber dennoch recht häufig Malmstén[3]) zugeschrieben.

Setzt man in (7) $t = -\log z$, so wird:

$$\log \Gamma(x) = \int_0^1 \left(\frac{1 - z^{x-1}}{1 - z} - (x-1)\right)\frac{dz}{\log z}, \quad \Re(x) > 0, \tag{8}$$

daraus ergibt sich ohne weiteres vermöge der allgemeinen Formel § 49, (4) die Binominalkoeffizientenreihe, welche Hermite[4]) für $\log \Gamma(x+y)$ entwickelt hat.

Wir wollen nunmehr aus den beiden Formeln (7) und (8) eine Reihe anderer Integraldarstellungen herleiten. Erstens finden wir mit Malmstén[5]) aus (7) die elegante Formel:

$$\int_0^\infty \frac{(e^{ty} - e^{-ty})^2 e^{-tx}}{t(1 - e^{-t})}\, dt = \log \frac{\Gamma(x+2y)\Gamma(x-2y)}{\Gamma(x)\Gamma(x)}, \tag{9}$$

wo also gleichzeitig $\Re(x) > 0$, $\Re(x \pm 2y) > 0$ angenommen werden muß.

In ähnlicher Weise findet man aus (8) die analoge Formel:

$$\log \frac{\Gamma(x_1 + x_2 + 1)}{\Gamma(x_1 + 1)\Gamma(x_2 + 1)} = -\int_0^1 \frac{(1 - t^{x_1})(1 - t^{x_2})}{1 - t} \cdot \frac{dt}{\log t}, \tag{10}$$

welche schon Euler[6]) und Legendre[7]) bekannt war. Aus (10) findet man ferner:

$$\log B(x, y) = \log \frac{x+y}{xy} + \int_0^1 \frac{(1 - t^x)(1 - t^y)}{1 - t} \cdot \frac{dt}{\log t},$$

1) Mémoires de Turin, 1818.
2) Journal de l'École Polytechnique, cahier 27, p. 261; 1839.
3) Journal für Mathematik, Bd. 35, p. 74; 1847.
4) Annali di Matematica, (3) Bd. 5, 1900.
5) Journal für Mathematik, Bd. 35, p. 76; 1847.
6) Nova Acta Acad. Petrop. Bd. 1 II; 1777.
7) Exercices sur le calcul intégral, Bd. II, p. 108; 1817.

und daraus wegen § 51, (3) die von **Binet**[1]) bemerkte Formel:

$$\text{(11)} \qquad \log B(x, y) = \int_0^1 \frac{(1-t^x)(1-t^y) - (1-t)^2}{t(1-t)\log t}\, dt,$$

wo man also $\Re(x) > 0$, $\Re(y) > 0$ annehmen muß.

Weiter setzen wir in (10) $x_1 + x_3$ statt x_1; die Subtraktion der beiden so erhaltenen Gleichungen gibt dann die Formel von **Legendre**[2]):

$$\text{(12)} \qquad \log \frac{\Gamma(x_1+1)\Gamma(x_1+x_2+x_3+1)}{\Gamma(x_1+x_2+1)\Gamma(x_1+x_3+1)} = -\int_0^1 \frac{z^{x_1}(1-z^{x_2})(1-z^{x_3})}{(1-z)\log z}\, dz.$$

Sie ist von **Stern**[3]), wie folgt, beträchtlich verallgemeinert worden.

Setzen wir in (10) x_3 statt x_1 und ziehen die so erhaltene Gleichung von (12) ab, so ergibt sich:

$$\text{(13)} \qquad \begin{cases} \log \dfrac{\Gamma(x_1+x_2+1)\Gamma(x_2+x_3+1)\Gamma(x_3+x_1+1)}{\Gamma(x_1+1)\Gamma(x_2+1)\Gamma(x_3+1)\Gamma(x_1+x_2+x_3+1)} = \\ \qquad = -\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t^{x_1})(1-t^{x_2})(1-t^{x_3})}{(1-t)\log t}\, dt; \end{cases}$$

fahren wir nun in ähnlicher Weise mit dieser Formel fort, so ergibt die vollständige Induktion den Satz von **Stern**:

Aus den verschiedenen Größen $x_1, x_2, \cdots, x_n$ bildet man alle möglichen Kombinationen ohne Wiederholungen; es bedeuten weiter u und v die Summe derjenigen Größen, welche in einer willkürlichen Kombination mit einer geraden bzw. ungeraden Anzahl Elementen vorkommen; dann ist allgemein:

$$\text{(14)} \quad \int_0^1 \frac{(1-t^{x_1})(1-t^{x_2})\cdots(1-t^{x_n})}{(1-t)\log t}\, dt = \sum \log\Gamma(v+1) - \sum \log\Gamma(u+1),$$

vorausgesetzt, daß alle u und v der Bedingung $\Re(u) > -1$, $\Re(v) > -1$ genügen.

Setzt man noch in (14) $x_1 + x_{n+1}$ statt x_1, so bestimmt die Subtraktion dieser beiden Gleichungen den Wert des folgenden Integrals:

$$\text{(15)} \qquad \int_0^1 \frac{t^{x_1}(1-t^{x_2})(1-t^{x_3})\cdots(1-t^{x_{n+1}})}{(1-t)\log t}\, dt.$$

---

1) Journal de l'École Polytechnique, cahier 27, p. 184; 1839.

2) Exercices sur le calcul intégral, Bd. II, p. 108; Paris 1817.

3) Zur Theorie der Eulerschen Integrale, p. 13; Göttinger Studien 1847.

Aus (14) leitet Stern[1]) eine von Euler[2]) herrührende Integralformel ab, indem er $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$ einführt; betrachtet man dann nacheinander die beiden Fälle, wo n gerade oder ungerade ist, so gibt eine ziemlich einfache Rechnung die Formel:

$$(16)\qquad \int_0^1 (t-1)^n \cdot \frac{dt}{\log t} = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{n}{s} \log(n-s+1),$$

welche indes auch unmittelbar aus § 51, (2) mittels § 48, (1) hergeleitet werden kann.

§ 74. Einige Anwendungen der Funktion $\nu(x)$.

Die Funktion:

$$(1)\qquad \nu(x) = \log x - \Psi(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \left(\frac{1}{x+s} - \log\left(1 + \frac{1}{x+s}\right)\right)$$

findet eine nicht uninteressante Anwendung auf die in § 50 entwickelten Partialbrüche:

$$(2)\qquad \mathfrak{G}(x) = \frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2}{x+2} + \cdots$$

oder auch:

$$(3)\qquad \mathfrak{G}(x) = \int_0^1 \varphi(t) t^{x-1} dt = \int_0^\infty \varphi(e^{-t}) e^{-tx} dt, \qquad \Re(x) > 0,$$

worin:

$$(4)\qquad \varphi(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots$$

gesetzt worden ist.

Es ist in der Tat leicht einzusehen, daß die beiden folgenden Reihen:

$$(5)\qquad \sum_{s=0}^{s=\infty} a_s \cdot \log\left(\frac{x+s}{s+1}\right), \qquad \sum_{s=0}^{s=\infty} a_s \cdot \nu(x+s)$$

überall da konvergieren müssen, wo dies mit (2) der Fall ist; erstens ist nämlich:

$$(6)\qquad \log\left(\frac{x+n}{n+1}\right) = -\log\left(1 + \frac{1-x}{x+n}\right) = -\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s} \cdot \left(\frac{1-x}{x+n}\right)^s$$

---

1) loc. cit. p. 15.

2) Institutiones calculi integralis, Bd. IV, p. 271; 1794.

woraus die Konvergenz der ersten Reihe (5) deutlich hervorgeht; zweitens ist aber wegen § 70, (4):

$$a_s \cdot \nu(x+s) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + 1\right) e^{-tx} \cdot a_s e^{-ts} dt. \tag{7}$$

Da nun die aus (4) für $\varphi(e^{-t})$ erhaltene Reihe von $t = 0$ bis $t = \infty$ gliedweise integrabel ist, so zeigt ein bekannter Satz[1]), daß auch die letzte Reihe (5) konvergiert, wo dies mit (2) der Fall ist; denn die Konvergenz der erwähnten Reihe hängt ja nur von den entfernteren Gliedern ab, und bei hinlänglich großem s ist die Formel (7) für jeden endlichen Wert von x anwendbar.

Was dagegen die aus (7) erhaltene Formel:

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} a_s \cdot \nu(x+s) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + 1\right) \varphi(e^{-t}) e^{-tx} dt \tag{8}$$

betrifft, so ist sie im allgemeinen nur für $\Re(x) > 0$ anwendbar, während die entsprechende Integraldarstellung:

$$\int_1^x \mathfrak{G}(x) dx = \sum_{s=0}^{s=\infty} a_s \log\left(\frac{x+s}{s+1}\right) \tag{9}$$

überall da richtig bleibt, wo die Entwicklung (2) einen Sinn hat.

Nach diesen Bemerkungen gehen wir von der Identität:

$$\Delta^{-1} \frac{1}{x+s} = \Psi(x+s) + J(x),$$

aus, wo $J(x+1) = J(x)$ sein muß; wir können daher das endliche Integral linker Hand so bestimmen, daß:

$$\Delta^{-1} \frac{1}{x+s} = \Psi(x+s) - \log(s+1) = \log\left(\frac{x+s}{s+1}\right) - \nu(x+s)$$

wird, woraus wegen (9) die allgemein gültige Formel:

$$\Delta^{-1} \mathfrak{G}(x) = \int_1^x \mathfrak{G}(x) dx - \sum_{s=0}^{s=\infty} a_s \cdot \nu(x+s) + J(x) \tag{10}$$

folgt, wo $J(x)$ der Periodizitätsbedingung $J(x+1) = J(x)$ genügt, sonst aber ganz willkürlich angenommen werden darf; damit ist aber der folgende Satz bewiesen:

---

1) U. Dini, Grundlagen, p. 528.

Falls die Partialbruchentwicklung (2) *konvergiert, ist es möglich, das endliche Integral von* $\mathfrak{G}(x)$ *so zu bestimmen, daß:*

$$\int_1^x \mathfrak{G}(x)dx - \Delta^{-1}\mathfrak{G}(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} a_s \cdot \nu(x+s) \tag{11}$$

wird, und diese Entwicklung hat einen Sinn außer in den Polen von $\mathfrak{G}(x)$*; die weitere aus* (11) *und* (8) *fließende Formel:*

$$\int_1^x \mathfrak{G}(x)dx - \Delta^{-1}\mathfrak{G}(x) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + 1\right) \varphi(e^{-t})e^{-tx}dt \tag{12}$$

ist im allgemeinen nur für $\Re(x) > 0$ *anwendbar.*

Als erstes Beispiel setzen wir:

$$\mathfrak{G}(x) = \beta(x), \quad \varphi(t) = \frac{1}{1+t};$$

die Differenzengleichung § 5, (16):

$$\Delta\beta(x) = \frac{1}{x} - 2\beta(x)$$

ergibt dann unmittelbar:

$$\Delta^{-1}\beta(x) = \frac{1}{2}\Psi(x) - \frac{1}{2}\beta(x) + J(x), \tag{13}$$

und daraus folgt wegen (12):

$$\begin{cases} \log \pi - \log B\left(\frac{x}{2}, \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\Psi(x) + \frac{1}{2}\beta(x) + J(x) = \\ = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^t+1} - \frac{1}{t} + 1\right) \frac{e^{-tx}}{1+e^{-t}}\, dt. \end{cases} \tag{14}$$

Um den Wert von $J(x)$ zu bestimmen, setzen wir in (14) $x+1$ statt x; die Addition der beiden so erhaltenen Gleichungen ergibt dann unter Anwendung bekannter Formeln:

$$J(x) = -\log\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

Somit finden wir für die Funktion:

$$H(x) = \log\sqrt{2\pi} - \log B\left(\frac{x}{2}, \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\Psi(x) \tag{15}$$

die Reihenentwicklung:

$$H(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \left(\nu(x+s) - \frac{1}{2(x+s)}\right) \tag{16}$$

und den Integralausdruck:

$$(17)\qquad H(x)=\int_0^\infty\left(\frac{1}{e^t-1}-\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\right)\frac{e^{-tx}}{1+e^{-t}}\,dt,\quad \Re(x)>0.$$

Aus (17) ergibt sich die noch einfachere Integraldarstellung:

$$(18)\quad H(x+1)-\frac{1}{2}\beta(x+1)=\int_0^\infty\left(\frac{1}{e^t-1}-\frac{1}{t}\right)\frac{e^{-tx}}{e^t+1}\,dt,\quad \Re(x)>-1.$$

Als zweites Beispiel betrachten wir die Funktion $\Psi(x)$; aus (1) folgt ohne weiteres, daß:

$$(19)\qquad \Psi(x)=\log x-\left(\nu(x)-\frac{1}{2x}\right)-\frac{1}{2x}$$

sein muß. Setzen wir daher der Kürze halber:

$$(20)\qquad \Phi(x)=\sum_{s=0}^{s=\infty}\left(\nu(x+s)-\frac{1}{2(x+s)}\right)$$

oder als bestimmtes Integral:

$$(21)\qquad \Phi(x)=\int_0^\infty\left(\frac{1}{e^t-1}-\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\right)\frac{e^{-tx}}{1-e^{-t}}\,dt,\qquad \Re(x)>0,$$

so ergibt sich aus (19) folgende Identität:

$$(22)\qquad \varDelta^{-1}\Psi(x)=\log\Gamma(x)+\Phi(x)-\frac{1}{2}\Psi(x)+J(x).$$

Eliminiert man aber aus (22) $\log\Gamma(x)$ und $\Psi(x)$, indem man die Funktionen $\mu(x)$ und $\nu(x)$ mittels (1) und der Formel:

$$(23)\qquad \mu(x)=\log\Gamma(x)-\left(x-\frac{1}{2}\right)\log x+x-\log\sqrt{2\pi}$$

einführt, so erhält man die zu (23) analoge Darstellung:

$$(24)\quad \varDelta^{-1}\Psi(x)=X(x)+(x-1)\log x-x+\log\sqrt{2\pi}+J(x),$$

wo der Kürze halber:

$$(25)\qquad X(x)=\mu(x)+\frac{1}{2}\nu(x)+\Phi(x)$$

gesetzt worden ist. Daraus folgt für $X(x)$ die Integraldarstellung:

$$(26)\quad X(x)=\frac{1}{4x}+\int_0^\infty\left[\left(\frac{1}{e^t-1}+1\right)^2-\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\right)^2\right]e^{-tx}dt,\quad \Re(x)>0.$$

Die Funktion $X(x)$ spielt daher, wie aus (23) und (24) deutlich hervorgeht, für die Auswertung von $\Delta^{-1}\Psi(x)$ dieselbe Rolle wie $\mu(x)$ für:

$$\log \Gamma(x) = \int_1^x \Psi(x)\,dx.$$

Diese Analogie der beiden Funktionen $\mu(x)$ und $X(x)$ tritt noch deutlicher in unseren späteren Untersuchungen §§ 114, 118 hervor.

Wir bemerken noch, daß die Integraldarstellungen (21) und (26) unmittelbar folgende andere:

$$(27)\quad 2\Phi(x) - X(x) + \frac{1}{4x} = \int_0^\infty \left[\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right]^2 e^{-tx}\,dt, \quad \Re(x) > -2$$

liefern.

§ 75. Produkte und Quadrate von $\beta(x)$ und $\Psi(x) + C$.

Die in § 50 entwickelte Partialbruchentwicklung gestattet uns in einfacher Weise, die in § 20 betrachteten Produkte zweier der Funktionen $\beta(x)$ und $\Psi(x) + C$ als bestimmte Integrale darzustellen.

Erstens gehen wir von der Formelgruppe § 20, (1), (3), (4):

$$(\Psi(x) + C)^2 = \Psi^{(1)}(x) - \frac{\pi^2}{6} - 2\,\xi(x),$$

$$(\Psi(x) + C)(\Psi(1 - x) + C) = \frac{\pi^2}{3} - \xi(x) - \xi(1 - x),$$

$$\beta(x)(\Psi(x) + C) = -\beta^{(1)}(x) + \beta(x)\log 2 + \frac{1}{2}\,\xi\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\,\xi\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

aus, wo der Kürze halber:

$$\xi(x) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \left(\frac{1}{x+s} - \frac{1}{s+1}\right)\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{s}\right)$$

gesetzt worden ist; es kommt also darauf an, eine Integraldarstellung für $\xi(x)$ zu finden. Zu dem Ende gehen wir von der Potenzreihe:

$$\varphi(t) = \frac{1}{1}\cdot t + \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right)\cdot t^2 + \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\cdot t^3 + \cdots, \qquad t < 1$$

aus und finden so ohne weiteres:

$$\varphi(t) = \frac{1}{1}\cdot\frac{t}{1-t} + \frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{1-t} + \cdots = -\frac{\log(1-t)}{1-t}.$$

Daraus folgt wegen § 50, (2):

$$(1) \qquad \xi(x) = -\int_0^1 \frac{(t^{x-1}-1)\log(1-t)}{1-t}\,dt, \qquad \Re(x) > 0.$$

Nun ist aber nach § 68, (7):

$$(2) \qquad \Psi^{(1)}(x) = -\int_0^1 \frac{t^{x-1}\log t}{1-t}\,dt, \qquad \Re(x) > 0$$

und somit auch:

$$(3) \qquad \frac{\pi^2}{6} = \Psi^{(1)}(1) = -\int_0^1 \frac{\log t}{1-t}\,dt,$$

woraus ohne weiteres die Integraldarstellungen:

$$(4) \qquad (\Psi(x)+C)^2 = \int_0^1 \frac{(t^{x-1}-1)(2\log(1-t)-\log t)}{1-t}\,dt, \quad \Re(x) > 0,$$

$$(5) \qquad (\Psi(x)+C)(\Psi(1-x)+C) = \int_0^1 \frac{(t^{x-1}+t^{-x}-2)\log(1-t)-2\log t}{1-t}\,dt$$

folgen, wo man also $2 > \Re(x) > 0$ voraussetzen muß.

Die dritte der oben erwähnten Funktionen $\beta(x)(\Psi(x)+C)$ kann nun auch ohne Mühe als Integral dargestellt werden; der erhaltene Ausdruck wird indessen nicht ganz einfach.

Die andere Formelgruppe § 20, (5), (7):

$$(\beta(x))^2 = \Psi^{(1)}(x) - 2\eta(x),$$
$$\beta(x)\beta(1-x) = \eta(x) + \eta(1-x),$$

wo der Kürze halber:

$$\eta(x) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\cdots+\frac{1}{x+s-1}\right)$$

gesetzt worden ist, führt auf die Potenzreihe:

$$\varphi(t) = \log 2 + \left(\log 2 - \frac{1}{1}\right)\cdot t + \left(\log 2 - \frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)\cdot t^2 + \cdots$$

zurück, aus der:

$$\varphi(t) = \frac{\log 2 - \log(1+t)}{1-t}$$

folgt. Somit ergeben sich die Integraldarstellungen:

$$(6) \qquad \eta(x) = \int_0^1 \frac{\log 2 - \log(1+t)}{1-t} \cdot t^{x-1} dt, \qquad \Re(x) > 0,$$

$$(7) \qquad (\beta(x))^2 = \int_0^1 \frac{2\log(1+t) - 2\log 2 - \log t}{1-t} \cdot t^{x-1} dt, \quad \Re(x) > 0,$$

$$(8) \quad \beta(x)\beta(1-x) = \int_0^1 \frac{(\log 2 - \log(1+t))(t^{x-1} + t^{-x})}{1-t} dt, \quad 1 > \Re(x) > 0,$$

von welchen (7) auch als eine unmittelbare Folge der allgemeinen Formel § 46, (6) für das Produkt zweier Integrale der Gattung $\mathfrak{B}(x)$ angesehen werden kann.

Endlich haben wir noch die Formel § 20, (8):

$$\beta(x)(\Psi(1-x) + C) = -\beta^{(1)}(1-x)\log 2 - \xi_1(x) + \xi_2(1-x)$$

zu untersuchen, wo der Kürze halber:

$$\xi_1(x) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s+x}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{s}\right),$$

$$\xi_2(x) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s+x}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{s-1}}{s}\right)$$

gesetzt worden ist.

Dieselbe Methode wie vorher liefert hier die Integraldarstellungen:

$$(9) \qquad \xi_1(x) = \int_0^1 \frac{\log(1+t)}{1+t} \cdot t^{x-1} dt, \qquad \Re(x) > 0,$$

$$(10) \qquad \xi_2(x) = -\int_0^1 \frac{\log(1-t)}{1+t} \cdot t^{x-1} dt, \qquad \Re(x) > 0,$$

$$(11) \quad \beta(x)(\Psi(1-x) + C) = \int_0^1 \frac{(\log 2 + \log(1+t))t^{x-1} - \log(1-t) \cdot t^{-x}}{1+t} dt,$$

wo man in (11) $2 > \Re(x) > 0$ voraussetzen muß.

- - - - -

Kapitel XIV.

Anwendungen. Reihen für $\log \Gamma(x)$ und $\Psi(x)$.

§ 76. Verallgemeinerung der Gaußschen Multiplikationsformel.

Als eine weitere Anwendung der Integralformel von **Plana** § 73, (7):

$$(1) \qquad \log \Gamma(x) = \int\limits_0^\infty \left((x-1)e^{-t} + \frac{e^{-tx} - e^{-t}}{1-e^{-t}}\right)\frac{dt}{t}, \qquad \Re(x) > 0$$

wollen wir nunmehr eine Verallgemeinerung der in § 6 für $\Gamma(x)$ entwickelten Multiplikationsformel von **Gauß** herleiten. Zu dem Ende setzen wir in (1) $px + \frac{ps}{n}$ statt x, wo p und n positive ganze Zahlen bedeuten; die Substitution $t = nz$ ergibt dann:

$$(2) \quad \log\Gamma\left(px+\frac{ps}{n}\right) = \int\limits_0^\infty \left[e^{-nz}\left(px-1+\frac{ps}{n}\right) + \frac{e^{-npzx-psz} - e^{-nz}}{1-e^{-nz}}\right]\frac{dz}{z}.$$

Daraus folgt ohne Mühe:

$$(3) \quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{s=0}^{s=n-1} \log \Gamma\left(px+\frac{ps}{n}\right) = \int\limits_0^\infty \left[e^{-nz}\left(npx - n + \frac{p(n-1)}{2}\right) + \right. \\ &\qquad \left. + \frac{e^{-npzx} \cdot \dfrac{1-e^{npz}}{1-e^{-pz}} - ne^{-nz}}{1-e^{-nz}}\right]\frac{dz}{z}. \end{aligned}\right.$$

Vertauscht man aber nun in (3) die Zahlen n und p, so wird nach einer Subtraktion der beiden so erhaltenen Gleichungen:

$$(4) \quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{s=0}^{s=n-1} \log \Gamma\left(px+\frac{ps}{n}\right) - \sum_{r=0}^{r=p-1} \log \Gamma\left(nx+\frac{nr}{p}\right) = \\ &= \left(npx + \frac{np-n-p}{2}\right) \cdot \int\limits_0^\infty \frac{e^{-nt} - e^{-pt}}{t}\, dt - J(n) + J(p), \end{aligned}\right.$$

wo der Kürze halber für $\Re(x) > 0$:

$$(5) \qquad J(x) = \int\limits_0^\infty \left[\frac{xe^{-tx}}{1-e^{-tx}} - \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} + \frac{1}{2}\left(xe^{-xt} - e^{-t}\right)\right]\frac{dt}{t}$$

gesetzt worden ist.

Die Integralformel § 51, (2) ergibt unmittelbar:

$$(6) \qquad \int_0^\infty \frac{e^{-nt} - e^{-pt}}{t}\, dt = \log\left(\frac{p}{n}\right),$$

so daß uns nur übrig bleibt, den Wert des Integrals $J(x)$ zu bestimmen.

Zu diesem Zwecke bemerken wir zuerst, daß $J(x)$ eine in x analytische Funktion sein muß, falls nur $\Re(x) > 0$ vorausgesetzt wird; wir denken uns daher für einen Augenblick x reell und positiv. Eine Differentiation nach x ergibt, wenn man in das so erhaltene Integral $t = zx$ einsetzt, daß $J^{(1)}(x)$ von x ganz unabhängig ist. Da nun offenbar:

$$J(1) = 0$$

sein muß, so findet man:

$$(7) \qquad J(x) = (x-1) \cdot K,$$

wo K eine noch unbekannte Konstante bedeutet.

Um nun den Wert von K zu bestimmen, setzen wir in (5) $x = 2$ und erhalten somit wegen (7):

$$K = \int_0^\infty \left[\frac{2e^{-2t}}{1-e^{-2t}} - \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} + e^{-2t} - \frac{1}{2}\, e^{-t}\right] \frac{dt}{t};$$

es ist aber:

$$\frac{2}{1-e^{-2t}} = \frac{1}{1+e^{-t}} + \frac{1}{1-e^{-t}}.$$

Demnach folgt:

$$K = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{1+e^{-t}} + e^{-t} - \frac{3}{2}\right) \frac{e^{-t}}{t}\, dt.$$

Somit ergibt sich wegen § 68, (6):

$$K = -\log \sqrt{2\pi}$$

Wir haben damit die Formel:

$$(8) \qquad \int_0^\infty \left[\frac{xe^{-tx}}{1-e^{-tx}} - \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} + \frac{1}{2}\,(xe^{-tx} - e^{-t})\right] \frac{dt}{t} = (1-x) \cdot \log \sqrt{2\pi}$$

bewiesen, wo $\Re(x) > 0$ vorausgesetzt werden muß. Also ergibt sich aus (4) und (6) die Formel:

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} \log \Gamma\left(px + \frac{ps}{n}\right) - \sum_{r=0}^{r=p-1} \log \Gamma\left(nx + \frac{nr}{p}\right) =$$

$$= \left(npx + \frac{np-n-p}{2}\right) \log\left(\frac{p}{n}\right) + (n-p) \log \sqrt{2\pi},$$

aus der ohne weiteres die andere:

$$(9)\qquad \frac{\prod_{s=0}^{s=n-1}\Gamma\left(px+\frac{ps}{n}\right)}{\prod_{r=0}^{r=p-1}\Gamma\left(nx+\frac{nr}{p}\right)}=\left(\frac{p}{n}\right)^{npx+\frac{np-n-p}{2}}\cdot(2\pi)^{\frac{n-p}{2}}$$

hergeleitet werden kann.

Die Formel (9), welche man Schobloch[1]) verdankt, ist eine Verallgemeinerung der Gaußschen Multiplikationsformel für $\Gamma(x)$; um diesen Spezialfall zu erhalten, hat man in der Tat in (9) nur $p = 1$ zu setzen.

§ 77. Reihe von Kummer für log $\Gamma(x)$.

Die Integralformel von Plana § 73, (7):

$$(1)\qquad \log\Gamma(x)=\int_0^\infty\left((x-1)e^{-t}+\frac{e^{-tx}-e^{-t}}{1-e^{-t}}\right)\frac{dt}{t},\qquad \Re(x)>0$$

gestattet uns noch eine von Kummer herrührende merkwürdige Reihenentwicklung für $\log\Gamma(x)$ herzuleiten. Zu diesem Zwecke setzen wir in (1) $1-x$ statt x. Die Identität:

$$\log\Gamma(x)+\log\Gamma(1-x)=\log\pi-\log\sin\pi x$$

ergibt dann ohne weiteres die Integraldarstellung:

$$(2)\qquad \begin{cases}\log\Gamma(x)-\log\pi+\log\sin\pi x=\\ =-\int_0^\infty\left(\frac{e^{-t+tx}-e^{-t}}{1-e^{-t}}-xe^{-t}\right)\frac{dt}{t},\end{cases}$$

wo man $\Re(x)<1$ voraussetzen muß. Aus der Addition der beiden Formeln (1) und (2) ergibt sich aber ohne Mühe:

$$(3)\qquad \begin{cases}2\log\Gamma(x)-\log\pi+\log\sin\pi x=\\ =\int_0^\infty\left[\frac{e^{\left(\frac{1}{2}-x\right)t}-e^{-\left(\frac{1}{2}-x\right)t}}{e^{\frac{t}{2}}-e^{-\frac{t}{2}}}-(1-2x)e^{-t}\right]\frac{dt}{t},\end{cases}$$

wo $0<\Re(x)<1$ vorauszusetzen ist.

---

1) Über Beta- und Gammafunktionen, p. 11; Halle 1884.

Nach diesen Vorbereitungen wollen wir nunmehr einige elementare trigonometrische Reihen entwickeln. Erstens gehen wir von der Identität:

$$\log(1 + e^{i\varphi}) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s(\cos(s+1)\varphi + i\sin(s+1)\varphi)}{s+1} \tag{4}$$

aus, die für $-\pi < \varphi < +\pi$ brauchbar ist. Daraus ergibt sich durch beiderseitige Trennung des Reellen und des Imaginären die Entwicklung:

$$\frac{\varphi}{2} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \sin(s+1)\varphi}{s+1}, \quad -\pi < \varphi < +\pi. \tag{5}$$

Es bedeute zweitens α eine endliche und bestimmte reelle oder komplexe Größe, dann ist:

$$f(\varphi) = e^{\alpha\varphi} - e^{-\alpha\varphi}$$

eine in φ ganze transzendente und *ungerade* Funktion; sie kann daher im Intervalle $-\pi < \varphi < +\pi$ in eine Reihe von der Form:

$$e^{\alpha\varphi} - e^{-\alpha\varphi} = a_1 \sin\varphi + a_2 \sin 2\varphi + a_3 \sin 3\varphi + \cdots \tag{6}$$

entwickelt werden, in der sich die Koeffizienten a_n folgendermaßen bestimmen lassen:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} (e^{\alpha\varphi} - e^{-\alpha\varphi}) \sin(n\varphi) d\varphi = \pi \cdot a_n; \tag{7}$$

aus der Identität:

$$2i \sin\varphi = e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}$$

folgt aber die andere:

$$2i \sin n\varphi \cdot (e^{\alpha\varphi} - e^{-\alpha\varphi}) = e^{(\alpha+ni)\varphi} + e^{-(\alpha+ni)\varphi} - e^{(\alpha-ni)\varphi} - e^{-(\alpha-ni)\varphi}$$

und daraus wegen (7):

$$\pi a_n = \frac{(-1)^{n+1} 2n}{\alpha^2 + n^2} (e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}).$$

Somit ergibt sich ohne weiteres die trigonometrische Reihe:

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{\alpha\varphi} - e^{-\alpha\varphi}}{e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s (s+1) \sin(s+1)\varphi}{(s+1)^2 + \alpha^2}, \tag{8}$$

welche also im Intervalle $-\pi < \varphi < +\pi$ brauchbar ist.

Nach diesen Erörterungen setzen wir nunmehr in (5) und (8):

$$\alpha = \frac{t}{2\pi}, \quad \varphi = (1-2x)\pi,$$

dann ergeben sich ohne weiteres die beiden Entwicklungen:

$$\frac{e^{\left(\frac{1}{2}-x\right)t} - e^{-\left(\frac{1}{2}-x\right)t}}{e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}} = 4 \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{2s\pi \cdot \sin(2s\pi x)}{t^2 + 4s^2\pi^2}, \tag{9}$$

$$1 - 2x = 4 \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\sin(2s\pi x)}{2s\pi}, \tag{10}$$

in welchen man demnach $0 < x < 1$ voraussetzen muß.

Führt man nun die Entwicklungen (9) und (10) in (3) ein, so darf die so erhaltene unendliche Reihe gliedweise von $t = 0$ bis $t = \infty$ integriert werden, weil sie unbedingt konvergent ist. Wir erhalten so eine Entwicklung von der Form:

$$2\log\Gamma(x) - \log\left(\frac{\pi}{\sin \pi x}\right) = 4 \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} a_s \cdot \sin(2s\pi x), \tag{11}$$

wo der Kürze halber:

$$a_n = \int_0^\infty \left(\frac{2n\pi}{t^2 + 4n^2\pi^2} - \frac{e^{-t}}{2n\pi}\right)\frac{dt}{t} \tag{12}$$

gesetzt worden ist, und daraus für a_n den weiteren Ausdruck:

$$a_n = \frac{1}{2n\pi} \cdot \int_0^\infty \left(\frac{4n^2\pi^2}{t^2 + 4n^2\pi^2} - \frac{1}{1+t}\right)\frac{dt}{t} + \frac{1}{2n\pi} \cdot \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+t} - e^{-t}\right)\frac{dt}{t}. \tag{13}$$

Aus § 72, (8) folgt aber, daß der Wert des letzten Integrals rechter Hand in (13) die Eulersche Konstante C ist. Somit haben wir nur noch das Integral:

$$J = \frac{1}{a} \cdot \int_0^\infty \left(\frac{a^2}{1+t^2} - \frac{1}{1+t}\right)\frac{dt}{t}, \qquad a > 0$$

zu bestimmen; es ist aber:

$$\frac{a^2}{(a^2+t^2)t} = \frac{1}{t} - \frac{t}{a^2+t^2}, \qquad \frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t},$$

woraus ohne weiteres:

$$J = \frac{1}{a} \cdot \log a$$

gefolgert werden kann. Somit ist allgemein:

$$a_n = \frac{1}{2n\pi}\,(C + \log(2\pi) + \log n).$$

Daraus folgt wegen (11) die Entwicklung:

$$(14)\quad 2\log\Gamma(x) - \log\left(\frac{\pi}{\sin\pi x}\right) = 4\cdot\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{C + \log(2\pi) + \log n}{2n\pi}\cdot\sin(2n\pi x),$$

welche mit Zuhilfenahme von (10) noch vereinfacht werden kann, so daß sich endlich die gesuchte Formel:

$$(15)\quad \begin{cases} \log\Gamma(x) = \left(\frac{1}{2} - x\right)(C + \log 2) + (1-x)\log\pi - \frac{1}{2}\log\sin\pi x + \\ \qquad + \sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{\log n}{n\pi}\cdot\sin(2n\pi x) \end{cases}$$

ergibt. Sie rührt von Kummer[1]) her und ist also für $0 < x < 1$ richtig; der oben gegebene Beweis ist von Schlömilch[2]).

Die Formel (15) ist später in anderer Weise von Gilbert[3]), Schläfli[4]), Schlömilch[5]), Hardy[6]) und Landsberg[7]) bewiesen worden.

Kummer[8]) hat mit Zuhilfenahme von (15) einen Beweis der Gaußschen Multiplikationsformel für $\Gamma(x)$ geliefert. Dieser Beweis läßt die Gaußsche Formel für $\Gamma(x)$, wie man leicht sieht, als eine einfache Folgerung der ähnlichen Formel § 6, (4) für $\sin x$ hervorgehen und ist daher sehr interessant.

Setzt man in (15) $x = \frac{1}{4}$, so ergibt sich wegen § 54, (3) die numerische Identität:

$$(16)\quad \log\left(\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}\right) = \frac{1}{2}(C - 5\log 2) + \log\pi + 2\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s\log(2s+1)}{2s+1}.$$

---

1) Journal für Mathematik, Bd. 35, p. 1—4; 1847.

2) Kompendium der höheren Analysis, Bd. II, p. 259—260; 1879.

3) Recherches sur le développement de la fonction Γ, p. 31. Mémoires de Bruxelles, Bd. 41; 1875.

4) Über die zwei Heineschen Kugelfunktionen (Anhang); Bern 1881.

5) Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 7, p. 262—264; 1862.

6) Messenger, (2) Bd. 31, p. 31—33; 1901.

7) Mémoires Couronnés de Belg., Bd. 55; 1897.

8) loc. cit.

§ 78. Reihe von Lerch für $\Psi(x) \cdot \sin \pi x$.

Da die Funktion $\Psi(x)$ in $x = 0$ einen einfachen Pol hat, ist sie im Intervalle $0 \leq t \leq 1$ nicht integrierbar; somit kann sie auch nicht wie ihr Integral $\log \Gamma(x)$ in eine trigonometrische Reihe entwickelt werden. Dagegen besitzt die Funktion $\Psi(x) \cdot \sin \pi x$ offenbar diese Eigenschaft.

Die Koeffizienten der trigonometrischen Reihe für $\Psi(x) \cdot \sin \pi x$ können ohne Mühe mittels der Formel § 77, (14) bestimmt werden. Zu diesem Zwecke müssen wir aber vor allem die Funktion $\log \sin \pi x$ näher untersuchen, was mittels § 77, (4) geschehen kann. Setzt man nämlich in dieser Formel $2\pi x - \pi$ statt φ so ergibt sich die Entwicklung:

$$\log \sin \pi x = -\log 2 - \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\cos (2 s \pi x)}{s}, \qquad 0 < x < 1. \tag{1}$$

Daraus fließen ohne Mühe die Integralformeln:

$$\left\{\begin{aligned} &\int_0^1 \log \sin \pi x \cdot \sin (2 n \pi x) dx = 0, \\ &\int_0^1 \log \sin \pi x \cdot \sin (2n+1) \pi x dx = -\frac{2 \log 2}{(2n+1)\pi}, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\int_0^1 \log \sin \pi x \cdot \cos (2 n \pi x) dx = -\frac{1}{2n}, \\ &\int_0^1 \log \sin \pi x \cdot \cos (2n+1) \pi x dx = 0, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

wo n eine solche ganze Zahl bedeutet, daß sowohl $2n$ als $2n+1$ positiv sind. Speziell findet man aus (1) die in § 55, (10) bewiesene Formel von Euler:

$$\int_0^1 \log \sin \pi x dx = -\log 2. \tag{4}$$

Mit Zuhilfenahme dieser Formeln ergeben sich dann ohne weiteres aus § 77, (14) die ähnlichen:

$$
(5) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \log \Gamma(x) \cdot \sin(2n\pi x)dx = \frac{C + \log(2n\pi)}{2n\pi}, \\ \displaystyle\int_0^1 \log \Gamma(x) \cdot \sin(2n+1)\pi x dx = \frac{\log(2\pi)}{(2n+1)\pi}, \end{cases}
$$

$$
(6) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \log \Gamma(x) \cdot \cos(2n\pi x)dx = \frac{1}{4n}, \\ \displaystyle\int_0^1 \log \Gamma(x) \cdot \cos(2n+1)\pi x dx = 0; \end{cases}
$$

hier sind $2n$ und $2n+1$ ebenfalls als positive ganze Zahlen anzusehen. Speziell findet man den folgenden Spezialfall der Formel von Raabe § 34, (17):

$$
(7) \qquad \int_0^1 \log \Gamma(x) dx = \log \sqrt{2\pi}.
$$

Weiter liefern die elementaren Identitäten:

$$
\sin \pi x \sin n\pi x = \frac{1}{2}(\cos(n-1)\pi x - \cos(n+1)\pi x),
$$

$$
\sin \pi x \cos n\pi x = \frac{1}{2}(\sin(n+1)\pi x - \sin(n-1)\pi x)
$$

durch partielle Integration das Formelpaar:

$$
\frac{2}{\pi} \cdot \int_0^1 \Psi(x) \sin \pi x \cdot \sin n\pi x dx = (n-1) \cdot \int_0^1 \log \Gamma(x) \cdot \sin(n-1)\pi x dx -
$$
$$
- (n+1) \cdot \int_0^1 \log \Gamma(x) \sin(n+1)\pi x dx,
$$

$$
\frac{2}{\pi} \cdot \int_0^1 \Psi(x) \sin \pi x \cdot \cos n\pi x dx = (n-1) \cdot \int_0^1 \log \Gamma(x) \cdot \cos(n-1)\pi x dx -
$$
$$
- (n+1) \cdot \int_0^1 \log \Gamma(x) \cdot \cos(n+1)\pi x dx,
$$

wo n ganz und größer als 1 angenommen werden muß. Speziell findet man:

$$\int_0^1 \Psi(x) \sin \pi x dx = -\pi \int_0^1 \log \Gamma(x) \cdot \cos \pi x dx,$$

$$\int_0^1 \Psi(x)(\sin \pi x)^2 dx = -\pi \int_0^1 \log \Gamma(x) \cdot \sin (2\pi x) dx,$$

$$\int_0^1 \Psi(x) \sin \pi x \cos \pi x dx = -\pi \int_0^1 \log \Gamma(x) \cdot \cos (2\pi x) dx.$$

Aus (5) findet man daher für positive ganze n:

$$(8) \qquad \begin{cases} \int_0^1 \Psi(x) \sin \pi x \cdot \sin (2n\pi x) dx = 0, \\ \int_0^1 \Psi(x) \sin \pi x \cdot \sin (2n+1)\pi x dx = \frac{1}{2} \log \frac{n}{n+1} \end{cases}$$

und aus (6) für positive ganze n, die größer als 1 sind:

$$(9) \qquad \int_0^1 \Psi(x) \sin \pi x \cdot \cos n\pi x dx = 0.$$

Weiter findet man speziell:

$$(10) \qquad \int_0^1 \Psi(x) \sin \pi x dx = 0,$$

$$(11) \qquad \int_0^1 \Psi(x) (\sin \pi x)^2 dx = -\frac{1}{2} (C + \log (2\pi)),$$

$$(12) \qquad \int_0^1 \Psi(x) \sin \pi x \cdot \cos \pi x dx = -\frac{\pi}{4}.$$

Aus diesen Integralformeln ergibt sich aber ohne weiteres die trigonometrische Reihenentwicklung:

$$(13) \qquad \begin{cases} \Psi(x) \cdot \sin \pi x + \frac{\pi}{2} \cos \pi x + (C + \log (2\pi)) \sin \pi x = \\ = \sum_{s=1}^{s=\infty} \log \left(\frac{s}{s+1}\right) \cdot \sin (2s+1)\pi x, \qquad 0 < x < 1, \end{cases}$$

welche man Lerch[1]) verdankt; der oben gegebene Beweis ist von Hermite[2]) angedeutet worden.

§ 79. Die Stirlingsche Reihe für $\log \Gamma(x)$.

Um eine noch wichtigere Entwicklung für jede der Funktionen $\mu(x)$ und $\nu(x)$ zu erhalten, gehen wir von den Formeln § 70, (20), (21):

$$\mu(x) = \int_0^\infty \frac{A(t)}{t+x}\, dt, \tag{1}$$

$$\nu(x) - \frac{1}{2x} = \int_0^\infty \frac{A(t)}{(t+x)^2}\, dt \tag{2}$$

aus, in denen:

$$A(t) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\sin(2s\pi t)}{s\pi}$$

ist. Wir setzen allgemein, indem n eine positive ganze Zahl bedeutet:

$$A_{2n-1}(t) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\sin(2s\pi t)}{(2s\pi)^{2n-1}}, \tag{3}$$

$$M_{2n}(t) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\cos(2s\pi t)}{(2s\pi)^{2n}}, \tag{4}$$

woraus speziell folgt:

$$A(t) = 2A_1(t).$$

Aus den Definitionen (3) und (4) folgert man nun unmittelbar durch partielle Integration, daß:

$$\int_0^t A_{2n-1}(t)\,dt = \frac{s_{2n}}{(2\pi)^{2n}} - M_{2n}(t), \tag{5}$$

$$\int_0^t M_{2n}(t)\,dt = A_{2n+1}(t) \tag{6}$$

---

1) Comptes rendus, Bd. 119, p. 725—728; 1894. Rozpravy, Bd. 3, Nr. 28 (böhmisch); 1894. Bulletin de l'Acad. François Joseph Bd. 1, p. 1—4; 1895. Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd. 8, p. 189—192; 1897.

2) Bull. de l'Acad. François Joseph, Bd. 1, p. 5—6; 1895.

sein muß, wobei in (5) für $p \geqq 2$:

$$s_p = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots$$

zu setzen ist; nun ist aber wegen § 18, (5):

$$\frac{s_{2p}}{(2\pi)^{2p}} = \frac{B_p}{(2p)!\,2},$$

wo B_p die p^{te} *Bernoullische* Zahl bedeutet. Somit läßt sich (5) auch folgendermaßen darstellen:

$$\int_0^t A_{2n-1}(t)\,dt = \frac{B_n}{(2n)!\,2} - M_{2n}(t). \tag{7}$$

Nach diesen Erörterungen wenden wir auf (1) und (2) wiederholentlich die partielle Integration an. Da die Resultate der so ausgeführten Integrationen sämtlich an der Grenze $t = \infty$ verschwinden, so fließen aus (6) und (7), wenn wir die partielle Integration $2n$-mal anwenden, die Formeln:

$$\mu(x) = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^s B_{s+1}}{(2s+1)(2s+2)} \cdot \frac{1}{x^{2s+1}} + (-1)^n (2n-1)! \int_0^\infty \frac{2M_{2n}(t)\,dt}{(t+x)^{2n}}, \tag{8}$$

$$\nu(x) - \frac{1}{2x} = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^s B_{s+1}}{2s+2} \cdot \frac{1}{x^{2s+2}} + (-1)^n (2n)! \int_0^\infty \frac{2M_{2n}(t)\,dt}{(t+x)^{2n+1}}; \tag{9}$$

eine nochmalige partielle Integration liefert dann die ähnlichen Formeln:

$$\mu(x) = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^s B_{s+1}}{(2s+1)(2s+2)} \cdot \frac{1}{x^{2s+1}} + (-1)^n (2n)! \int_0^\infty \frac{2A_{2n+1}(t)}{(t+x)^{2n+1}}\,dt, \tag{10}$$

$$\nu(x) - \frac{1}{2x} = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^s B_{s+1}}{2s+2} \cdot \frac{1}{x^{2s+2}} + (-1)^n (2n+1)! \int_0^\infty \frac{2A_{2n+1}(t)}{(t+x)^{2n+2}}\,dt. \tag{11}$$

Es leuchtet ein, daß die Formeln (9) und (11) aus (8) bzw. (10) durch Differentiation nach x erhalten werden können, und daß alle vier Formeln für willkürliche Werte von x, die nicht Null oder negativ reell sind, richtig bleiben.

Wir setzen nunmehr:

$$x = \varrho e^{i\theta}, \quad -\pi < \theta < +\pi,$$

wo der absolute Wert von ϱ sehr groß ist, und wollen die in (8) und (9) vorkommenden Restintegrale:

$$R_n(x) = (2n-1)!\int_0^\infty \frac{2M_{2n}(t)\,dt}{(t+x)^{2n}},$$

$$R_n'(x) = (2n)!\int_0^\infty \frac{2M_{2n}(t)\,dt}{(t+x)^{2n+1}}$$

näher untersuchen. Zu dem Ende bemerken wir, daß für reelle und nicht negative t:

$$|t+\varrho\cos\theta - i\varrho\sin\theta|^2 = (t+\varrho)^2 - 4\varrho t\sin^2\frac{\theta}{2} > (t+\varrho)^2\cos^2\frac{\theta}{2}$$

sein muß, denn es ist ja offenbar $(t+\varrho)^2 > 4t\varrho$. Somit ergibt sich die für die folgende Untersuchung fundamentale Ungleichung:

$$|t+\varrho e^{i\theta}| > (t+\varrho)\cos\frac{\theta}{2}. \tag{12}$$

Aus (10) und (11) finden wir nun vermöge der Definitionen von $R_n(x)$ und $R_n'(x)$ weiter, daß:

$$R_n(x) = (2n+1)!\int_0^\infty \frac{2M_{2n+2}(0) - 2M_{2n+2}(t)}{(t+x)^{2n+2}}\,dt, \tag{13}$$

$$R_n'(x) = (2n+2)!\int_0^\infty \frac{2M_{2n+2}(0) - 2M_{2n+2}(t)}{(t+x)^{2n+3}}\,dt \tag{14}$$

sein muß. Da nun für reelle t immer:

$$M_{2n+2}(0) - M_{2n+2}(t) \geqq 0$$

ist, so fließen aus (13) und (14) wegen (12) folgende andere Ungleichungen:

$$|R_n(x)| < \frac{(2n+1)!}{\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2n+2}}\cdot R_n(\varrho), \tag{15}$$

$$|R_n'(x)| < \frac{(2n+2)!}{\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2n+3}}\cdot R_n'(\varrho). \tag{16}$$

Setzt man nun in (8) und (9) $x=\varrho$ und $n+1$ statt n, so findet man:

$$R_n(\varrho) = \frac{B_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)\varrho^{2n+1}} - R_{n+1}(\varrho) < \frac{B_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)\varrho^{2n+1}},$$

$$R_n'(\varrho) = \frac{B_{n+1}}{(2n+2)\varrho^{2n+2}} - R_{n+1}'(\varrho) < \frac{B_{n+1}}{(2n+2)\varrho^{2n+2}}.$$

Daraus folgen wegen (15) und (16) die beiden Majorantwerte:

$$(17)\qquad |R_n(x)| < \frac{B_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)\varrho^{2n+1}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2n+2}},$$

$$(18)\qquad |R_n'(x)| < \frac{B_{n+1}}{(2n+2)\varrho^{2n+2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2n+3}}.$$

Aus (8) und (9) folgt dann ohne weiteres, daß:

$$\lim_{|x|=\infty}\left|\mu(x) - \sum_{s=0}^{s=n-1}\frac{(-1)^s B_{s+1}}{(2s+1)(2s+2)}\cdot\frac{1}{x^{2s+1}}\right|\cdot|x|^{2n} = 0,$$

$$\lim_{|x|=\infty}\left|\nu(x) - \frac{1}{2x} - \sum_{s=0}^{s=n-1}\frac{(-2)^s B_{s+1}}{2s+2}\cdot\frac{1}{x^{2s+2}}\right|\cdot|x|^{2n+1} = 0$$

ist. Somit haben wir entsprechend der von Poincaré[1]) eingeführten Definition einer asymptotischen Reihe folgenden Satz bewiesen:

Setzt man $x = |x|e^{i\theta}$, *wo* $-\pi < \theta < +\pi$ *anzunehmen ist, so gelten die beiden asymptotischen Entwicklungen:*

$$(19)\qquad \mu(x) \sim \sum_{s=0}^{s=n-1}\frac{(-1)^s B_{s+1}}{(2s+1)(2s+2)}\cdot\frac{1}{x^{2s+1}},$$

$$(20)\qquad \nu(x) \sim \frac{1}{2x} + \sum_{s=0}^{s=n-1}\frac{(-1)^s B_{s+1}}{2s+2}\cdot\frac{1}{x^{2s+2}}.$$

Die Reihe (19) ist die sogenannte *Stirlingsche* Reihe[2]), welche eine ganze Literatur hervorgerufen hat; wir erwähnen z. B. Arbeiten von Binet[3]), Lipschitz[4]), Malmstén[5]), Schaar[6]), Limbourg[7]), Sonin[8]), Landsberg[9]) und Mellin[10]).

---

1) Acta Mathematica, Bd. 8, p. 297; 1886.

2) Methodus differentialis, p. 135; 1730. Stirling gibt die asymptotische Reihe für $\log[a(a+1)\cdots(a+n-1)]$, für sehr große n.

3) Journal de l'École Polytechnique, cahier 27; 1839.

4) Journal für Mathematik, Bd. 56, p. 11—26; 1859.

5) Ebenda, Bd. 35, p. 55—82; 1847.

6) Mémoires Couronnés de Bruxelles, Bd. 22; 1846.

7) Mémoires de Belgiques; 1873.

8) Comptes rendus, Bd. 108, p. 725—727; 1889. Annales de l'École Normale, (3) Bd. 6, p. 257—262; 1889.

9) Mémoires Couronnés de Bruxelles, Bd. 55; 1897.

10) Acta Mathematica, Bd. 25, p. 171; 1902.

Der oben gegebene Beweis ist schon von Gilbert[1]) angegeben worden. Der Nachweis der vollen Allgemeingültigkeit der Reihe (19) rührt indessen von Stiltjes[2]) her; früher hat man nur die Anwendbarkeit dieser Formel für $-\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2}$ gekannt. Wir haben die Reihen (19) und (20) in § 117 noch von einem andern Gesichtspunkte aus zu untersuchen.

Hinsichtlich der Funktionen $\mu(x)$ und $\nu(x)$ selbst bemerken wir, daß die Formeln (1) und (2) durch partielle Integration die Gleichungen (13) und (14) liefern, wenn wir dort $n = 0$ setzen und

$$R_0(x) = \mu(x), \quad R_0'(x) = \nu(x) - \frac{1}{2x}$$

einführen. Wir finden somit den Satz von Stiltjes[3]):

Unter denselben Voraussetzungen wie vorher ist für hinlänglich große ϱ:

$$|\mu(\varrho e^{i\theta})| < \frac{1}{12\varrho\cos^2\frac{\theta}{2}}, \tag{21}$$

$$\left|\nu(\varrho e^{i\theta}) - \frac{1}{2\varrho e^{i\theta}}\right| < \frac{1}{12\varrho^2\cos^3\frac{\theta}{2}}. \tag{22}$$

Aus den Ungleichungen (21), (22) folgt aber unmittelbar die Formel § 36, (3) und der Satz in § 37.

Hinsichtlich der Anwendungen der *Stirlingschen* Reihe bemerken wir, daß Degen[4]) $\log(n!)$ von $n = 1$ bis $n = 100$ auf 18 Dezimalstellen berechnet hat.

Kapitel XV.

Die Funktionen $P_a(x)$ und $Q_a(x)$.

§ 80. Integraldarstellungen. Genre von $Q_a(x)$.

Bei unserer Bestimmung des zweiten *Eulerschen* Integrals haben wir schon in § 57, (4) die Funktion $P(x)$ als bestimmtes Integral dargestellt; allgemeiner finden wir in ähnlicher Weise die Formel:

1) Mémoires de Belgiques, Bd. 41; 1875.

2) Journal de Mathématiques, (4) Bd. 5, p. 436; 1889.

3) loc. cit. p. 433.

4) Tabularum ad faciliorem et breviorem probabilitatis computationem utilium enneas. Kopenhagen 1824.

$$P_a(x) = \int_0^a e^{-t} t^{x-1} dt, \quad \Re(x) > 0. \tag{1}$$

Führt man nämlich statt e^{-t} die gewöhnliche Potenzreihe ein, so darf man offenbar gliedweise integrieren; somit findet man unmittelbar die Reihenentwicklung § 9, (1) wieder.

Nachdem die Integraldarstellung (1) für $P_a(x)$ gefunden worden, ergibt sich unmittelbar aus dem zweiten Eulerschen Integrale für die komplementäre Funktion:

$$Q_a(x) = \Gamma(x) - P_a(x)$$

die ähnliche Darstellung:

$$Q_a(x) = \int_a^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \tag{2}$$

wo a eine von Null verschiedene Größe bedeutet, während der Integrationsweg ganz willkürlich angenommen werden kann; nur darf dieser Weg nicht den Punkt $t = 0$ umschlingen oder durch ihn hindurchgehen, und für überaus große Werte von $|t|$ muß immer $\Re(t) > 0$ angenommen werden.

Die Integraldarstellung (2) kann sehr leicht umgestaltet werden. Setzt man nämlich in dieser Formel $t = az + a$, so erhält man ohne weiteres:

$$\int_0^\infty e^{-az}(1+z)^{x-1} dz = e^a a^{-x} Q_a(x), \tag{3}$$

wo der Integrationsweg mit der Achse der positiven Zahlen zusammenfällt und $\Re(a) > 0$ vorausgesetzt werden muß; denn die Richtigkeit der Formel (3) ist für reelle und positive a einleuchtend, ferner sind die beiden Seiten dieser Formeln in a analytische Funktionen, falls $\Re(a) > 0$ angenommen wird.

Mellin[1]) hat eine andere Integralformel angegeben; um diese Darstellung herzuleiten, setzen wir in (2) $1 - x$ statt x und wenden die Formel § 61, (7):

$$\frac{1}{t^x} = \frac{1}{\Gamma(x)} \cdot \int_0^\infty e^{-tz} z^{x-1} dz, \quad \Re(x) > 0$$

an; dann wird offenbar:

---

1) Lindhagen, Dissertation p. 33; Stockholm 1887.

$$\Gamma(x)Q_a(1-x) = \int_a^\infty e^{-t}dt \int_0^\infty e^{-tz}z^{x-1}dz.$$

Denken wir uns hier für einen Augenblick a und x positiv, so darf die Integrationsfolge vertauscht werden[1]). Somit ergibt sich die Formel:

$$(4) \qquad e^a\Gamma(x)Q_a(1-x) = \int_0^\infty \frac{e^{-za}\cdot z^{x-1}}{1+z}dz, \quad \Re(a)>0, \quad \Re(x)>0.$$

Für die Koeffizienten der beständig konvergierenden Potenzreihe:

$$(5) \qquad Q_a(x) = q_0(a) + q_1(a)x + q_2(a)x^2 + q_3(a)x^3 + \cdots$$

findet man mittels (2) den allgemeinen Ausdruck:

$$(6) \qquad q_n(a) = \frac{1}{n!}\cdot\int_a^\infty \frac{e^{-t}}{t}(\log t)^n dt$$

oder auch durch partielle Integration:

$$(7) \qquad q_n(a) = -\frac{e^{-a}(\log a)^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!}\cdot\int_a^\infty e^{-t}(\log t)^{n+1}dt.$$

Aus diesen Ausdrücken der Koeffizienten $q_n(a)$ ersieht man, daß die Untersuchungen von Hadamard[2]) über die absoluten Werte der Nullstellen der *Riemannschen* Funktion $\xi(x)$ beinahe wortgetreu auf unsere Funktion $Q_a(x)$ übertragen werden können. Es gilt also der Satz:

Die in x ganze transzendente Funktion $Q_a(x)$ ist vom Genre 1.

§ 81. Über die Gleichung $Q_a(x) = 0$ für positive a.

Was die Nullstellen von $Q_a(x)$ betrifft, wo a als *positiv* anzusehen ist, so ergibt die Integraldarstellung § 80, (2), für *reelle* x, $Q_a(x) > 0$; daraus folgt der Satz:

Für positive a kann die Funktion $Q_a(x)$ keine reelle Nullstelle besitzen.

Lindhagen[3]) hat außerdem bewiesen, daß die Funktion $Q(x)$ (für $a=1$) keine Nullstelle ω haben kann, für die $\Re(\omega) \leq 1$ ist; der Beweis von Lindhagen ergibt den noch allgemeineren Satz:

1) Stolz, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung, Bd. III, p. 18.
2) Journal de Mathématiques, (4) Bd. 9, p. 210ff.; 1893.
3) Dissertation, p. 36; Stockholm 1887.

Für positive a kann die Funktion $Q_a(x)$ keine Nullstelle ω besitzen, welche der Ungleichung $\Re(\omega) \leqq a$ Genüge leistet.

Um diesen Satz zu beweisen, setzen wir in der Integraldefinition § 80, (2) $t = ae^z$ und erhalten folgende andere Formel:

$$a^{-x} Q_a(x) = \int_0^\infty e^{-ae^z} e^{zx}\, dz; \tag{1}$$

es sei nun $\omega = \alpha + i\beta$, wo α und β reell sind, eine komplexe Nullstelle für $Q_a(x)$, dann ist wegen (1):

$$\int_0^\infty e^{-ae^z} e^{z\alpha} \cos(\beta z)\, dz = 0, \tag{2}$$

$$\int_0^\infty e^{-ae^z} e^{z\alpha} \sin(\beta z)\, dz = 0. \tag{3}$$

Hier kann man offenbar β als positiv annehmen; die Substitution $z\beta = t$ ergibt dann wegen (3), daß:

$$\int_0^\infty e^{-ae^{\frac{t}{\beta}}} e^{\frac{t\alpha}{\beta}} \sin z\, dz = 0 \tag{4}$$

sein muß. Daraus folgt ohne weiteres:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \left[\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} e^{-ae^{\frac{t}{\beta}}} e^{\frac{t\alpha}{\beta}} \sin z\, dz + \int_{(2n+1)\pi}^{(2n+2)\pi} e^{-ae^{\frac{t}{\beta}}} e^{\frac{t\alpha}{\beta}} \sin z\, dz \right] = 0$$

oder, was offenbar dasselbe ist:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \left(e^{-ae^{\frac{t}{\beta}}} z^{\frac{t\alpha}{\beta}} - e^{-ae^{\frac{t+\pi}{\beta}}} e^{\frac{(t+\pi)\alpha}{\beta}} \right) \sin z\, dz = 0. \tag{5}$$

Die Gleichung (5) ist aber offenbar unmöglich, wenn die Funktion:

$$f(t) = e^{-ae^t} e^{t\alpha}$$

für positive t mit t zugleich abnimmt, d. h. wenn $f^{(1)}(t)$ immer ***negativ*** ist, denn $f(t)$ ist ja eine in t kontinuierliche Funktion. Nun findet man ohne Mühe:

$$f^{(1)}(t) = e^{-ae^t} e^{t\alpha} (\alpha - ae^t);$$

daraus geht deutlich hervor, daß $f^{(1)}(t)$ für jedes positive t negativ sein muß, wenn nur $\alpha \leqq a$ angenommen wird. Damit ist unser Satz bewiesen.

§ 82. Die Reihenentwicklung von Hermite.

Es ist bisher nicht gelungen, außer dem Integrale des vorigen Paragraphen für die ganze transzendente Funktion $Q_a(x)$ eine wirklich einfache Darstellung zu finden; indessen hat Hermite[1]) für unsere Funktion eine bemerkenswerte Entwicklung geliefert, welche folgendermaßen gefunden worden ist.

Setzt man:

$$Q_n = \int_{a+n}^{a+n+1} e^{-t} t^{x-1} dt,$$

wo n eine ganze, nicht negative Zahl bedeutet, so wird offenbar wegen § 80, (2):

$$Q_a(x) = Q_0 + Q_1 + Q_2 + Q_3 + \cdots. \tag{1}$$

Um das Teilintegral Q_n umzuformen, setzt man $a + n + z = t$; daraus folgt:

$$Q_n = (a+n)^{x-1} e^{-(a+n)} \cdot \int_0^1 e^{-z} \left(1 + \frac{z}{a+n}\right)^{x-1} dz. \tag{2}$$

Weiter macht man hinsichtlich a die beiden Voraussetzungen, daß für alle in Betracht kommenden n:

$$|a+n| > 1, \quad \Re(a+n) > 0 \tag{3}$$

sein soll; somit ergibt die Binomialformel wegen (2):

$$Q_n = (a+n)^{x-1} e^{-(a+n)} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{P(s+1)}{(a+n)^s} \cdot \binom{x-1}{s}, \tag{4}$$

wo $P(x) = P_1(x)$ zu setzen ist.

Führt man demnach die Ausdrücke (4) in (1) ein, so ergibt sich eine Doppelreihe, deren einzelne Horizontal- und Vertikalreihen unter den Voraussetzungen (3) wie Potenzreihen konvergieren, so daß es erlaubt ist, die Glieder unserer Doppelreihe nach den Binomialkoeffizienten $\binom{x-1}{n}$ zu ordnen; setzt man daher der Kürze halber:

$$R_a(x) = \sum_{r=0}^{r=\infty} e^{-(a+r)} (a+r)^{x-1}, \tag{5}$$

so entsteht die Formel von Hermite:

$$Q_a(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} P(n+1)\, R_a(x-n) \cdot \binom{x-1}{n}, \tag{6}$$

---

1) Journal für Mathematik, Bd. 90, p. 332—338; 1881.

welche also unter den Bedingungen (3) für jeden endlichen Wert von x richtig bleibt.

Die Zahlenkoeffizienten $P(n+1)$ lassen sich mittels der Formeln in § 10 ausdrücken; man findet nämlich aus § 10, (4) für $a = 1$:

$$P(n+1) = \frac{1}{e} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{n!}{(n+s+1)!} \tag{7}$$

oder, was dasselbe ist:

$$P(n+1) = n!\left(1 - \frac{1}{e} \cdot \sum_{s=0}^{s=n} \frac{1}{s!}\right). \tag{8}$$

Wünscht man noch die Funktion $Q(x)$ (also $Q_a(x)$ für $a = 1$) auszudrücken, so hat man die Identität:

$$Q_a(x) - Q(x) = P(x) - P_a(x)$$

und daraus wegen (6):

$$Q(x) = P_a(x) - P(x) + \sum_{n=0}^{n=\infty} P(n+1) R_a(x-n) \cdot \binom{x-1}{n}. \tag{9}$$

§ 83. Die Reihenentwicklung von Mellin.

Mellin[1]) hat durch eine leichte Änderung der oben angewandten Methode von Hermite die Differenz $P_a(x) - P(x)$ rechter Hand in § 82, (9) weggeschafft, und zwar mittels einer anderen Transformation des Teilintegrals Q_n in § 82, (2).

Mellin setzt nämlich in Q_n $a + n + 1 - z = t$ und findet somit ohne Mühe:

$$Q_n = (a+n+1)^{x-1} e^{-(a+n+1)} \cdot \int_0^1 e^z \left(1 - \frac{z}{a+n+1}\right)^{x-1} dz, \tag{1}$$

so daß die Bedingungen § 82, (3):

$$|a+n| > 1, \quad \Re(a+n) > 0$$

nur von $n = 1$ an notwendig sind. Dieselbe Methode wie vorher liefert dann die § 82, (6) ähnliche Formel:

$$Q_a(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \mathfrak{P}(s+1) R_{a+1}(x-s) \cdot \binom{x-1}{s}, \tag{2}$$

1) Acta Mathematica, Bd. 2, p. 231—232; 1883.

wo der Kürze halber:

$$\mathfrak{P}(x) = \int_0^1 e^t \cdot t^{x-1} dt, \quad \Re(x) > 0 \tag{3}$$

gesetzt worden ist.

Die so definierte Funktion $\mathfrak{P}(x)$ ist zu $P(x)$ analog; man findet in der Tat aus (3) die Partialbruchentwicklung:

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{1}{s!} \cdot \frac{1}{x+s}, \tag{4}$$

während eine partielle Integration die Differenzengleichung:

$$\mathfrak{P}(x+1) = e - x \cdot \mathfrak{P}(x) \tag{5}$$

liefert, aus der ohne Mühe die Fakultätenreihenentwicklung:

$$\mathfrak{P}(x) = e \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{x(x+1)\cdots(x+s)} \tag{6}$$

hergeleitet werden kann; diese Entwicklung (6) ist offenbar in der ganzen x-Ebene, außer in den Polen von $\mathfrak{P}(x)$, konvergent.

Aus (6) findet man weiter für den in (2) vorkommenden allgemeinen Koeffizienten $\mathfrak{P}(n+1)$ die Ausdrücke:

$$\mathfrak{P}(n+1) = e . \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s n!}{(n+s+1)!}, \tag{7}$$

$$\mathfrak{P}(n+1) = n! \left[e \cdot \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s}{(n-s)!} - (-1)^n \right]. \tag{8}$$

Setzt man endlich in (2) $a = 1$, was ja erlaubt ist, und außerdem der Kürze halber:

$$R(x) = R_2(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} e^{-s-2}(s+2)^{x-1},$$

so gelangt man zu der Formel von Mellin:

$$Q(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \mathfrak{P}(s+1) R(x-s) \cdot \binom{x-1}{s}, \tag{9}$$

die viel bequemer ist als die von Hermite, weil sie nicht den Parameter a enthält, und weil darin die Funktion $P_a(x)$ nicht vorkommt.

§ 84. Kettenbruch von Legendre.

Schon Legendre hat gezeigt, daß es möglich ist, die Funktion $Q_a(x)$ in einen Kettenbruch von einfacher Form zu entwickeln. Um diese Darstellung herzuleiten, gehen wir von dem bestimmten Integrale:

$$U^{\nu,\varrho}(a) = \int_0^\infty e^{-ta} t^\nu (1+t)^\varrho dt, \quad \Re(a) > 0, \quad \Re(\nu) > -1 \tag{1}$$

aus, das als eine Verallgemeinerung des in § 80, (4) vorkommenden angesehen werden kann. In der Tat ist:

$$U^{x-1,-1}(a) = e^{-a}\Gamma(x) Q_a(1-x). \tag{2}$$

Eine partielle Integration ergibt nun wegen (1) die Formel:

$$a\, U^{\nu+1,\varrho}(a) = (\nu+1)\, U^{\nu,\varrho}(a) + \varrho\, U^{\nu+1,\varrho-1}(a), \tag{3}$$

indem man zuerst $\nu + 1$ statt ν setzt. Daraus folgt nach einer einfachen Umformung:

$$\frac{U^{\nu+1,\varrho}(a)}{U^{\nu,\varrho}(a)} = \cfrac{\nu+1}{a - \cfrac{\varrho}{\cfrac{U^{\nu+1,\varrho}(a)}{U^{\nu+1,\varrho-1}(a)}}}; \tag{4}$$

weiter ergibt die offenbare Identität:

$$t^{\nu+2}(1+t)^{\varrho-1} = t^{\nu+1}(1+t)^\varrho - t^{\nu+1}(1+t)^{\varrho-1}$$

gemäß (1) die folgende Rekursionsformel:

$$U^{\nu+2,\varrho-1}(a) = U^{\nu+1,\varrho}(a) - U^{\nu+1,\varrho-1}(a);$$

aus (4) folgt dann:

$$\frac{U^{\nu+1,\varrho}(a)}{U^{\nu,\varrho}(a)} = \cfrac{\nu+1}{a - \cfrac{\varrho}{1 + \cfrac{U^{\nu+2,\varrho-1}(a)}{U^{\nu+1,\varrho-1}(a)}}}, \tag{5}$$

woraus die formale Entwicklung des Kettenbruches deutlich hervorgeht.

In unserem durch (2) definierten speziellen Falle ist nun:

$$\frac{U^{x,-1}(a)}{U^{x-1,-1}(a)} = \frac{\Gamma(x+1)Q_a(-x)}{\Gamma(x)Q_a(1-x)} = \frac{x Q_a(-x)}{Q_a(1-x)};$$

daraus folgt wegen § 9, (5):

$$\frac{U^{x,-1}(a)}{U^{x-1,-1}(a)} = -1 + \frac{e^{-a}a^{-x}}{Q_a(1-x)};$$

setzt man demnach in (5) $\varrho = -1$ und $1 - x$ statt x, so erhält man folgende in etwas anderer Form von Legendre[1]) gegebene Kettenbruchentwicklung:

$$(6)\quad Q_a(x) = \cfrac{e^{-a}a^x}{a + \cfrac{1-x}{1 + \cfrac{1}{a + \cfrac{2-x}{1 + \cfrac{2}{a + \cfrac{3-x}{1 + \ddots}}}}}},$$

die für *positive* a und *reelle* x sicher konvergiert. Es leuchtet ein, daß auch das in § 80, (3) vorkommende Integral als ein Spezialfall von (1) angesehen werden kann; dadurch findet man die Formel (6) wieder.

Der Kettenbruch (6) bricht von selbst ab, wenn x eine positive ganze Zahl bedeutet, was ja mit der Formel § 10, (7) in Einklang steht.

Endlich bemerken wir noch, daß der Kettenbruch (5) offenbar dem von Gauß[2]) angegebenen ähnlich ist; es ist indessen bemerkenswert, daß $U^{\nu,\varrho}(x)$ in eine asymptotische Reihe entwickelt werden kann, die man erhält, indem man in (1) die Entwicklung:

$$(1+t)^\varrho = 1 + \binom{\varrho}{1}t + \binom{\varrho}{2}t^2 + \binom{\varrho}{3}t^3 + \cdots, \qquad |t| < 1$$

einführt und dann gliedweise integriert. Dadurch findet man in der Tat:

$$U^{\nu,\varrho}(a) \sim \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{\binom{\varrho}{s}\Gamma(\nu+s+1)}{a^{\nu+s+1}},$$

wo die Reihe rechter Hand mit der divergierenden hypergeometrischen Reihe:

$$(7)\qquad \frac{1}{a^{\nu+1}} \cdot \lim_{k=\infty} F\left(-\varrho,\ \nu+1,\ k,\ -\frac{a}{k}\right)$$

zusammenfällt; wendet man aber auf die illegitime Entwicklung (7) die Formeln von Gauß nur *formell* an, so ergibt sich eben die Kettenbruchentwicklung (5).

1) Traité des fonctions elliptiques et des intégrales Eulériennes, Bd. II, p. 509; Paris 1826.

2) Comment. Gotting., Bd. 2, p. 13ff.; 1812. Werke, Bd. III, p. 134ff. Deutsche Ausgabe, p. 20ff.

§ 85. Kettenbrüche von Schlömilch und J. Tannery.

Aus § 80, (1), (2) folgen für die Funktionen:

$$f(a) = e^a a^{-x} P_a(x), \quad g(a) = e^a a^{-x} Q_a(x)$$

unmittelbar die Darstellungen:

$$f(a) = e^a a^{-x} \int_0^a e^{-t} t^{x-1} dt, \quad g(a) = e^a a^{-x} \int_a^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

und daraus durch Differentiation nach a:

$$af^{(1)}(a) + (x-a) f(a) = 1, \tag{1}$$

$$ag^{(1)}(a) + (x-a) g(a) = -1 \tag{2}$$

oder, was offenbar dasselbe ist:

$$f(a) = \frac{1}{x - a + a \cdot \dfrac{f^{(1)}(a)}{f(a)}}, \tag{3}$$

$$g(a) = \frac{1}{a - x - a \cdot \dfrac{g^{(1)}(a)}{g(a)}}; \tag{4}$$

differentiiert man aber die beiden Formeln (1) und (2) noch n-mal, so ergeben sich die allgemeineren Rekursionsformeln:

$$\frac{f^{(n)}(a)}{f^{(n-1)}(a)} = \frac{n}{x + n - a + a \cdot \dfrac{f^{(n+1)}(a)}{f^{(n)}(a)}}, \tag{5}$$

$$\frac{g^{(n)}(a)}{g^{(n-1)}(a)} = \frac{n}{x + n - a + a \cdot \dfrac{g^{(n+1)}(a)}{g^{(n)}(a)}}; \tag{6}$$

somit erhält man unter Anwendung von (3) und (5) den Kettenbruch von Schlömilch[1]):

$$P_a(x) = \cfrac{e^{-a} a^x}{x - a + \cfrac{1 \cdot a}{x + 1 - a + \cfrac{2 \cdot a}{x + 2 - a + \cfrac{3 \cdot a}{x + 3 - a + \cdots}}}}, \tag{7}$$

der für *positive* a und *reelle* x sicher konvergiert.

1) Zeitschrift für Math. und Physik, Bd 16, p. 261—262; 1871.

In ähnlicher Weise folgt für die komplementäre Funktion aus (4) und (6) die entsprechende Entwicklung:

$$(8)\quad Q_a(x) = \cfrac{e^{-a} a^x}{a - x + \cfrac{1 \cdot a}{a - 1 - x + \cfrac{2 \cdot a}{a - 2 - x + \cfrac{3 \cdot a}{a - 3 - x + \cfrac{4 \cdot a}{a - 4 - x + \ddots}}}}}$$

Wir bemerken noch, daß J. Tannery[1]) für $Q(x)$ die andere Entwicklung:

$$(9)\quad e \cdot Q(x) = \cfrac{1}{2 - x - \cfrac{1 \cdot (1 - x)}{4 - x - \cfrac{2 \cdot (2 - x)}{6 - x - \cfrac{3 \cdot (3 - x)}{8 - x - \ddots}}}}$$

gefunden hat, die sicher für *reelle* x ebenfalls konvergiert. Da indessen sowohl die Herleitung des Kettenbruches wie der Beweis seiner Konvergenz nicht gerade einfach sind, müssen wir uns darauf beschränken, auf die Arbeit von Tannery selbst hinzuweisen.

Kapitel XVI.

Die Umkehrprobleme von Mellin.

§ 86. Das erste Umkehrproblem.

Mellin hat neuerdings zwei merkwürdige Reziprozitätsgesetze gefunden, die nach einer gründlicheren Vertiefung sicher die Zahl der durch Gammafunktionen ausdrückbaren Integrale beträchtlich vermehren werden.

Mellin betrachtet als Verallgemeinerung der Gammafunktion eine Funktion $F(z)$, welche folgender Bedingung genügt:

In der Ebene der komplexen Veränderlichen $z = u + iv$ kann ein zur imaginären Achse paralleler Streifen so bestimmt werden, daß sich $F(z)$ in der Umgebung jeder endlichen Stelle im Innern und auf der Begrenzung des Streifens regulär verhält und für hinreichend große, demselben Bereiche angehörende Werte auf die Form:

$$(1)\qquad |F(z)| = e^{-\delta |v|} \cdot f(u, v)$$

---

1) Comptes rendus, Bd. 94, p. 1698—1701, Bd. 95, p. 75; 1882.

gebracht werden kann, wo δ eine positive Konstante bedeutet, während $f(u, v)$ eine positive Funktion der reellen Veränderlichen u und v bezeichnet, so daß es möglich ist, eine beliebig kleine positive Zahl ε zu bestimmen, für welche:

$$e^{-\varepsilon|v|} \cdot f(u, v) \tag{2}$$

stets endlich bleibt, wie groß auch $|v|$ angenommen werden mag.

Die Formel von Pincherle § 38, (5) zeigt dann deutlich, daß $\Gamma(z)$ ein Spezialfall der allgemeinen Funktion $F(z)$ sein muß.

Wir betrachten nun das Integral:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z) x^{-z} \, dz, \tag{3}$$

für das der Integrationsweg eine unbegrenzte, in dem obengenannten Streifen $\alpha \leqq u \leqq \beta$ gelegene gerade Linie ist und setzen:

$$x = |x| \cdot e^{i\theta};$$

wir haben danach zu beweisen, daß unser Integral $\Phi(x)$ in dem durch die Ungleichungen:

$$-\delta + 2\varepsilon \leqq \theta \leqq +\delta - 2\varepsilon \tag{4}$$

definierten Bereiche gleichmäßig konvergiert, wenn eventuell kleine Umgebungen der Stellen $x = 0$ und $x = \infty$ ausgeschlossen werden.

Zu diesem Zwecke setzen wir $z = a + iv$; aus der Definition:

$$x^{-z} = e^{-z(\log|x| + i\theta)}$$

folgt dann:

$$|x^{-z}| = |x|^{-a} \cdot e^{\pm\theta|v|},$$

daraus aber wegen (1), (2) und (4):

$$\frac{1}{2\pi} \cdot |F(z) x^{-z}| \leqq |x|^{-a} e^{-2\varepsilon|v|} \cdot f(a, v), \tag{5}$$

wo also $f(a, v)$ von x unabhängig ist.

In der unendlichen Reihe:

$$\Phi(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{a+ni}^{a+(n+1)i} F(z) x^{-z} \, dz \tag{6}$$

sind die absoluten Beträge der einzelnen Glieder demnach nicht größer als die entsprechenden Glieder der anderen Reihe:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |x|^{-a} \cdot \int_{n}^{n+1} e^{-2\varepsilon|v|} f(a,v) \, dv = |x|^{-a} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varepsilon|v|} \cdot e^{-\varepsilon|v|} f(a,v) \, dv; \tag{7}$$

das Integral rechter Hand in (7) hat aber einen endlichen und be-

stimmten Wert, und somit ist die Reihe (6) in x gleichmäßig konvergent, wenn eventuell die Stellen $x = 0$ und $x = \infty$ ausgeschlossen werden.

Da nun die Glieder der unendlichen Reihe rechter Hand in (6), die Stellen $x = 0$ und $x = \infty$ eventuell ausgenommen, in x monogene Funktionen sind, so ist $\Phi(x)$ selbst einem bekannten Satze zufolge, wenn die Bedingung (4) erfüllt ist, eine in x analytische Funktion.

Wendet man weiter den Integralsatz von Cauchy an, so leuchtet ein, daß das Integral (3) für jeden Wert von a, für den $\alpha \leqq a \leqq \beta$ ist, dieselbe Funktion von x darstellen muß. Bedeutet nämlich R die Begrenzung eines Rechteckes, das vollständig in dem durch die Ungleichungen $\alpha \leqq u \leqq \beta$ bestimmten Streifen liegt, so verschwinden die Integrale längs der unendlich fernen, zur Achse der reellen Zahlen parallelen Seiten. Da also a in (7) willkürlich angenommen werden kann, wenn nur $\alpha \leqq a \leqq \beta$ angenommen wird, so ergibt die Formel (7) den Grenzwert:

$$\lim_{|x|=\infty} \left|x^k \cdot \Phi(x)\right| = 0, \quad \alpha < k < \beta. \tag{8}$$

Aus (8) folgert man nun weiter, daß das bestimmte Integral:

$$J = \int_0^\infty \Phi(x) x^{z-1} dx \tag{9}$$

einen Sinn hat, wenn $z = u + iv$ und $\alpha < u < \beta$ angenommen wird. Um den Wert von J zu berechnen, setzt man:

$$J = \int_0^1 \Phi(x) x^{z-1} dx + \int_1^\infty \Phi(x) x^{z-1} dx,$$

und daraus folgt wegen (3):

$$J = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_0^1 x^{z-1} dx \cdot \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} F(t) x^{-t} dt + \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_1^\infty x^{z-1} dx \cdot \int_{\beta - i\infty}^{\beta + i\infty} F(t) x^{-t} dt.$$

Aus der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe (6) schließt man, daß es erlaubt ist, die obigen zweimaligen Integrationen zu vertauschen, und man findet so:

$$J = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\beta - i\infty}^{\beta + i\infty} \frac{F(t)}{t - z} dt - \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{F(t)}{t - z} dt;$$

daraus ergibt sich, wenn R die Begrenzung des obenerwähnten Rechteckes bedeutet:

$$J = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_R \frac{F(t)}{t-z}\, dt = F(z),$$

denn die beiden Integrale längs der unendlich fernen Seiten von R verschwinden wie zuvor; damit haben wir aber das erste Reziprozitätsgesetz von Mellin[1]) bewiesen:

Für jede Funktion $F(z)$, welche der obenerwähnten Bedingung Genüge leistet, gilt die Umkehrformel:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_0^\infty x^{z-1}\, dx \cdot \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(t) x^{-t} dt \tag{10}$$

oder in zwei Gleichungen geschrieben:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(t) x^{-t} dt, \quad F(z) = \int_0^\infty \Phi(x) x^{z-1}\, dx. \tag{11}$$

§ 87. Das zweite Umkehrproblem.

Mellin hat ein ähnliches Reziprozitätsgesetz auch für die Funktion $\Phi(x)$ aufgestellt, falls diese Funktion folgender Bedingung genügt:

$\Phi(x)$ ist eine im Bereiche:

$$-\delta \leq \theta \leq +\delta, \qquad x = |x| e^{i\theta}, \tag{1}$$

eventuell mit Ausnahme der Werte $x = 0$ und $x = \infty$, sich überall regulär verhaltende Funktion, welche die Ungleichung:

$$|\Phi(x)| < K \cdot |x|^{-a} \tag{2}$$

befriedigt, für welche $\alpha \leq a \leq \beta$ vorausgesetzt wird, wobei α und β zwei reelle Größen bedeuten, von denen $\alpha < \beta$ ist, während K eine endliche positive Konstante ist, die sowohl von x als auch von a unabhängig sein soll.

Setzt man demnach $\omega = p + iq$, wo p und q reell sind, so verhält sich die Funktion:

$$\Phi(e^{i\omega}) e^{\frac{\alpha+\beta}{2}\omega i} \tag{3}$$

in jedem endlichen Punkte des durch die Ungleichungen $-\delta \leq p \leq \delta$ definierten Parallelstreifens regulär; außerdem ist wegen (2) immer:

$$\left| \Phi(e^{i\omega}) e^{\frac{\alpha+\beta}{2}\omega i} \right| < K \cdot e^{-\frac{\beta-\alpha}{2}|q|}. \tag{4}$$

1) Acta Mathematica, Bd. 25, p. 159; 1902.

Nach diesen Erörterungen setzen wir:

$$t = e^{\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - z\right)i} = |t| \cdot e^{i\theta} \tag{5}$$

und betrachten nunmehr das bestimmte Integral:

$$F(z) = \frac{1}{i} \cdot \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Phi(e^{i\omega}) e^{\frac{\alpha+\beta}{2}\omega i} \cdot t^{-\omega} \, d\omega, \tag{6}$$

wo $-\delta \leqq a \leqq +\delta$ vorauszusetzen ist. Weiter bestimmen wir den reellen Winkel θ so, daß:

$$-\frac{\beta-\alpha}{2} \leqq \theta \leqq +\frac{\beta-\alpha}{2}$$

wird, d. h., wegen (5), für $z = u + iv$:

$$\alpha \leqq u \leqq \beta. \tag{7}$$

Unter diesen Voraussetzungen muß $F(z)$, wie einleuchtend ist, eine in dem Parallelstreifen sich regulär verhaltende Funktion in z sein, die wegen (4) außerdem die Bedingung:

$$|F(z)| = K_1 \cdot |t|^{-a}$$

oder, was dasselbe ist:

$$|F(z)| < K_1 \cdot e^{-\delta |v|}, \quad z = u + iv \tag{8}$$

erfüllen muß, wo K_1 stets endlich bleibt.

Nach (4) findet man aber durch Anwendung der Formel § 86, (10) das weitere Resultat:

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_0^{\infty} t^{\xi - 1} \, dt \cdot \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Phi(e^{i\omega}) e^{\frac{\alpha+\beta}{2}\omega i} \, d\omega = \Phi(e^{i\xi}) e^{\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \xi i},$$

aus dem sich durch die Substitutionen:

$$t = e^{\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - z\right)i}, \quad e^{i\xi} = x$$

die einfachere Formel:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z) x^{-z} \, dz \tag{9}$$

ergibt. Setzt man aber in (6) $e^{i\omega} = \zeta$, so erhält man für $F(z)$ folgende Darstellung:

$$F(z) = \int_0^{\infty} \Phi(\zeta) \zeta^{z-1} \, d\zeta. \tag{10}$$

Damit ist auch das zweite Reziprozitätsgesetz von Mellin[1]) bewiesen:

---

1) Acta Mathematica, Bd. 25, p. 160; 1902.

Für jede Funktion $\Phi(x)$, die der obengenannten Bedingung Genüge leistet, gilt die Umkehrformel:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} x^{-z}\, dz \cdot \int_0^{\infty} \Phi(t) t^{z-1}\, dt. \tag{11}$$

§ 88. Umkehrung der Eulerschen Integrale.

Wie schon Mellin gezeigt hat, liefern die Eulerschen Integrale schöne Beispiele für sein erstes Umkehrproblem.

Gehen wir zunächst von der Formel § 53, (4) aus, so finden wir für $B(z, y-z)$ die Integraldarstellung:

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma(y-z)}{\Gamma(y)} = \int_0^{\infty} \frac{x^{z-1}}{(1+x)^y}\, dx, \quad 0 < \Re(z) < \Re(y); \tag{1}$$

nun ist aber der Formel § 38, (5) zufolge für $z = u + iv$:

$$|\Gamma(z)\Gamma(y-z)| = e^{-\pi|v|} \cdot f(u, v);$$

daraus folgt wegen § 86, (11) die Formel von Mellin[1]):

$$\frac{\Gamma(y)}{(1+x)^y} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(z)\Gamma(y-z) x^{-z}\, dz, \tag{2}$$

wo $0 < a < \Re(y)$, $-\pi < \theta < +\pi$ angenommen werden muß, indem $x = |x| e^{i\theta}$ gesetzt wird.

Für $y = 1$ findet man aus (2) die spezielle Formel:

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2i} \cdot \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{x^{-z}}{\sin \pi z}\, dz, \tag{3}$$

wo $0 < a < 1$ und $-\pi < \theta < +\pi$ anzunehmen ist.

Aus dem zweiten *Eulerschen* Integrale:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{z-1}\, dx, \quad 0 < \Re(z) < +\infty$$

findet man in ähnlicher Weise eine weitere Formel von Mellin[2]):

$$e^{-x} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(z) x^{-z}\, dz, \tag{4}$$

wo man $0 < a < +\infty$ und $-\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2}$ annehmen muß.

---

1) Acta Mathematica, Bd. 25, p. 161; 1902.

2) loc. cit. Acta Soc. Fennicae, Bd. 21, Nr. 1, p. 76; 1896. Ebenda Bd. 24, Nr. 10, p. 39; 1899.

Es ist jedoch zu bemerken, daß Pincherle[1]) schon 1888 sehr weitgehende Verallgemeinerungen der Formeln (2) und (4) untersucht hat, so daß vielleicht gar die Integrale von Pincherle zu Mellins Untersuchung den Anstoß gegeben haben.

Als eine weitere Anwendung des ersten *Mellinschen* Umkehrproblemes betrachten wir das Integral § 80, (3):

$$e^y \Gamma(x) Q_y(1-x) = \int_0^\infty \frac{e^{-ty} t^{x-1}}{1+t} dt, \quad \Re(y) < 0, \ \Re(x) > 0;$$

da nun, wenn x nur nicht negativ reell ist, immer:

$$\lim_{|x|=\infty} P_a(x) = 0$$

ist, so hat man offenbar:

$$\lim_{|x|=\infty} \left| \frac{Q(1-x)}{\Gamma(1-x)} \right| = 1.$$

Somit liefert das erste Umkehrproblem ohne weiteres folgende Integraldarstellung:

$$(5) \qquad \frac{e^{-y(z+1)}}{z+1} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(x) Q_y(1-x) z^{-x} dx,$$

wo $0 < a < +\infty$ und $-\pi < \theta < +\pi$ angenommen werden muß.

§ 89. Über Binomialkoeffizientenentwicklungen.

Nach den einfachen Beispielen des vorhergehenden Paragraphen wollen wir jetzt einen ziemlich allgemeinen Satz über die Anwendung des ersten *Mellinschen* Umkehrproblemes und zwar unter Anwendung der Binomialkoeffizientenreihen herleiten.

Zu diesem Zwecke gehen wir von der Reihe § 49, (8), (12):

$$(1) \qquad W(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \Delta^s W(1) \cdot \binom{x-1}{s}, \quad \Re(x) > 0$$

aus, indem wir voraussetzen, daß die Funktion $W(x)$ zugleich der Bedingung:

$$(2) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{W(n)}{n^k} = 0$$

genügt, wenn k eine endliche, von n unabhängige Konstante bedeutet. Unter diesen Voraussetzungen müssen, wie leicht einzusehen ist, die beiden Potenzreihen:

1) Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei; 1888.

$$(3) \qquad f(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \Delta^s W(1) \cdot x^s,$$

$$(4) \qquad g(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s W(s+1) \cdot x^s$$

für $|x| < 1$ sicher konvergieren; für $g(x)$ ist dies eine unmittelbare Folge von (2), während § 21, (5) die Richtigkeit unserer Behauptung für $f(x)$ darlegt.

Schreibt man nun aber die Reihe $f(x)$ folgendermaßen:

$$\begin{aligned} f(x) = {} & W(1) + \\ & W(1)\,x - W(2)\,x + \\ & W(1)\,x^2 - \binom{2}{1} W(2)\,x^2 + \binom{2}{2} W(3)\,x^2 + \\ & W(1)\,x^3 - \binom{3}{1} W(2)\,x^3 + \binom{3}{2} W(3)\,x^3 - \binom{3}{3} W(4)\,x^3 + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

so erhält man eine Doppelreihe, deren Horizontalreihen sicher unbedingt konvergieren, falls nur $|x| < 1$ angenommen wird. Für die Vertikalreihen hat man den allgemeinen Ausdruck:

$$u_s = (-1)^s x^s \cdot W(s+1) \cdot \sum_{r=0}^{r=\infty} \binom{r+s}{s} \cdot x^r,$$

aus dem sich, falls $|x| < 1$ angenommen wird:

$$u_s = (-1)^s W(s+1) \cdot \frac{x^s}{(1-x)^{s+1}}$$

ergibt; diese Reihe konvergiert demnach ebenfalls unbedingt, wenn $|x| < |1-x|$ angenommen wird, d. h. die Vertikalreihe u_s konvergiert sicher unbedingt, wenn $\Re(x) < \frac{1}{2}$ angenommen wird.

Setzt man also voraus, daß sowohl $|x| < 1$ als auch $\Re(x) < \frac{1}{2}$ ist, so ist die obengenannte Doppelreihe unbedingt konvergent. Somit ergibt sich die fundamentale Formel:

$$(5) \qquad f(x) = \frac{1}{1-x} \cdot g\left(\frac{x}{1-x}\right),$$

aus der umgekehrt:

$$(6) \qquad g(x) = \frac{1}{1+x} \cdot f\left(\frac{x}{1+x}\right)$$

gefolgert werden kann. Die hier angewendete Transformation rührt schon von Euler[1]) her.

1) Institutiones calculi differentialis, p. 282; 1755.

Aus (5) und (6) folgt nun weiter folgender Spezialfall eines allgemeinen Satzes von Lindelöf[1]):

Wenn die Funktion $W(x)$ den beiden Bedingungen (1) *und* (2) *Genüge leistet, so sind die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ in jedem endlichen Punkte der durch die Ungleichung $\Re(x) < \frac{1}{2}$ bzw. $\Re(x) > -\frac{1}{2}$ definierten Halbebene analytisch.*

In dem speziellen Falle, wo sich $W(x)$ als ein Integral $\mathfrak{B}(x)$ darstellen läßt, wenn also:

$$W(x) = \int_0^1 \varphi(t) t^{x-1} dt \tag{7}$$

ist, findet man ohne Mühe folgende Darstellungen:

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{1-(1-t)x} dt, \quad g(x) = \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{1+tx} dt, \tag{8}$$

so daß die beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ in der ganzen x-Ebene analytisch sein müssen, vielleicht mit Ausnahme der Strecken der Achse der reellen Zahlen, für welche $x \geqq 1$ bzw. $x \leqq -1$ ist.

Gehen wir nach diesen Vorbemerkungen von der Formel § 53, (15):

$$\frac{(-1)^n \pi}{\sin \pi x} \cdot \binom{x-1}{n} = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{n-x} dt, \quad 0 < \Re(x) < n+1$$

aus, so finden wir durch Zuhilfenahme eines bekannten Satzes über die gliedweise Integration einer unendlichen Reihe[2]) unmittelbar folgende Integraldarstellung:

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} \cdot W(x) = \int_0^1 \frac{f(1-t) t^{x-1}}{(1-t)^x} dt, \qquad 0 < \Re(x) < 1, \tag{9}$$

wo $f(x)$ die Potenzreihe (3) bedeutet.

Geht man in ähnlicher Weise von der Formel § 64, (18) aus, so erhält man die zu (9) analoge Formel:

$$\frac{\pi e^{\frac{\pi x i}{2}}}{\sin \pi x} \cdot W(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos\varphi \cdot e^{i\varphi}) \frac{e^{i\varphi}}{\cos\varphi} (\operatorname{tg}\varphi)^{x-1} d\varphi, \; 0 < \Re(x) < 1, \tag{10}$$

1) Acta Societatis Fennicae, Bd. 24, Nr. 7; 1898.

2) U. Dini, Grundlagen, p. 523; 1892.

während der Integralausdruck § 56, (5) die weitere Darstellung:

$$(11) \qquad W(x) = \frac{1}{2\pi i}\cdot\int_W f\left(1-\frac{1}{t}\right)(1+t)^{x-1}dt, \quad \Re(x) > 0$$

liefert, wo W den in § 56 definierten Integrationsweg bedeutet.

§ 90. Anwendungen des ersten Umkehrproblems.

Wir haben nunmehr die Integraldarstellung § 89, (9) so umzuformen, daß die Grenzen 0 und ∞ werden, und setzen zu diesem Zwecke:

$$t = \frac{z}{1+z};$$

dann ergeben sich offenbar folgende Integraldarstellungen:

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\pi}{\sin\pi x}\cdot W(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{f\left(\frac{1}{1+z}\right)}{1+z}\cdot z^{x-1}\,dz, \\ \dfrac{\pi}{\sin\pi x}\cdot W(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{z}\cdot g\left(\frac{1}{z}\right)z^{x-1}dz, \quad 0 < \Re(x) > 1. \end{cases}$$

Setzt man dagegen in § 89, (10) $t = \operatorname{tg}\varphi$, so entsteht ein Integral von derselben Form wie (1), aber mit den Grenzen $t = 0$, $t = +\infty\cdot i$, so daß dieses Integral durch eine Änderung des Integrationsweges in (1) übergeführt werden kann. Indessen ist es für die Anwendungen häufig bequem, das Integral § 89, (10) in seiner ursprünglichen Gestalt zu verwenden.

Wir denken uns nunmehr, daß $W(z)$ für $z = u + iv$ der Bedingung § 86, (1):

$$(2) \qquad |W(u+iv)| = e^{-\delta|v|}\cdot f_1(u,v), \quad 0 < u < 1$$

genügt; alsdann ist auch:

$$\left|\frac{\pi}{\sin\pi z}\right| = e^{-\pi|v|}\cdot f_2(u,v), \quad 0 < u < 1$$

und somit wegen (2):

$$(3) \qquad \left|\frac{\pi\, W(z)}{\sin\pi z}\right| = e^{-(\pi+\delta)|v|}\cdot f_3(u,v), \quad 0 < u < 1,$$

so daß die Funktion linker Hand in (3) eine Funktion $F(z)$ von Mellin ist.

Wendet man demnach die Umkehrformel § 86, (10) an, so ergibt sich folgender Satz:

Es sei $W(x)$ eine Funktion, welche die Bedingungen § 89, (1), (2) *und* § 90, (2) *befriedigt, dann hat man für die entsprechenden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ die Integraldarstellungen:*

$$(4) \qquad \frac{f\left(\frac{1}{1+x}\right)}{1+x} = \frac{1}{x} \cdot g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2i} \cdot \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{W(z)}{\sin \pi z} \cdot x^{-z}\, dz,$$

wo im allgemeinen $0 < a < 1$ und $-(\pi+\delta) < \theta < +(\pi+\delta)$ vorausgesetzt werden muß, indem $x = |x| e^{i\theta}$ gesetzt worden ist. Jedoch sind im allgemeinen die beiden Stellen $x = 0$ und $x = \infty$ auszuschließen.

Wir werden später im dritten Teile ganze Funktionenklassen kennen lernen, für welche die Formel (4) zulässig ist; sie ist es nämlich für alle die Fakultätenreihen, welche für $\Re(x) > 0$ konvergieren.

Endlich setzen wir in den beiden Integralen rechter Hand in (1):

$$\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$$

und transformieren das letzte der so erhaltenen Integrale durch die Substitution $t = \frac{1}{z}$; dann gewinnt man den neuen Satz:

Setzt man der Kürze halber:

$$(5) \quad V_1(x) = \int_0^1 g(t) t^{x-1}\, dt, \qquad V_2(x) = \int_0^1 \frac{f\left(\frac{1}{1+t}\right)}{1+t} \cdot t^{x-1}\, dt,$$

so ist immer:

$$(6) \qquad \frac{\pi}{\sin \pi x} \cdot W(x) = V_1(1-x) + V_2(x).$$

§ 91. Anwendung auf die Funktionen $\frac{1}{x}$ und $\log(1+x)$.

Für ein erstes Beispiel zu der in den vorhergehenden Paragraphen entwickelten Theorie benutzen wir den Ausdruck:

$$W(x) = \frac{1}{x} = \int_0^1 t^{x-1}\, dt, \quad \Re(x) > 0$$

und finden nach § 89, (4), (5):

$$g(x) = \frac{1}{x} \cdot \log(1+x), \quad f(x) = -\frac{1}{x} \cdot \log(1-x);$$

daraus folgt unter Anwendung von § 90, (4):

$$\text{(1)} \qquad \log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2i}\cdot\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{x^{-z}}{z\sin\pi z}\,dz,$$

wo man $0 < a < 1$ und $-\pi < \theta < +\pi$ voraussetzen muß.

Die Anwendung der Integralformel § 89, (10) ergibt hier:

$$\frac{\pi e^{-\frac{\pi x i}{2}}}{x\sin\pi x} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)i - \log\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\,(\operatorname{tg}\varphi)^{x-1}d\varphi, \quad 0<\Re(x)<1;$$

daraus ergeben sich vermöge der Substitution $\operatorname{tg}\varphi = z$ die zwei weiteren Darstellungen:

$$\text{(2)} \qquad \frac{\pi}{x\sin\frac{\pi x}{2}} = \int\limits_0^\infty \log\left(1+\frac{1}{z^2}\right)\cdot z^{x-1}dz, \quad 0 < \Re(x) < 2,$$

$$\text{(3)} \qquad \frac{\pi}{x\cos\frac{\pi x}{2}} = \int\limits_0^\infty \operatorname{arc\,cot} z\cdot z^{x-1}dt, \quad 0 < \Re(x) < 1,$$

wo $\log\left(1+\frac{1}{z^2}\right)$ für $z = \infty$ und $\operatorname{arc\,cot} z$ für $z = \frac{\pi}{2}$ verschwinden müssen. Nach diesen Erörterungen findet man aus § 90, (4) unmittelbar:

$$\text{(4)} \qquad \log\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{2i}\cdot\int\limits_{a+i\infty}^{a+i\infty}\frac{x^{-z}}{z\sin\frac{\pi z}{2}}\,dz, \quad 0 < a < 2$$

$$\text{(5)} \qquad \operatorname{arc\,cot} x = \frac{1}{4i}\cdot\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{x^{-z}}{z\cos\frac{\pi z}{2}}\,dz, \quad 0 < a < 1,$$

wo man außerdem $-\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2}$ voraussetzen muß.

Wendet man endlich die Formel § 90, (6) an, so gelangt man nach einer einfachen Rechnung zu folgender Integraldarstellung:

$$\text{(6)} \qquad \frac{\beta(x)+\log 2}{x} = \int\limits_0^1 \log\left(1+\frac{1}{t}\right)\cdot t^x dt, \quad \Re(x) > 0,$$

welche auch mittels der allgemeinen Multiplikationsformel des § 46 hergeleitet werden kann.

Für ein zweites Beispiel setzen wir:

$$W(x) = \log(1+x) = \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\log t}\, dt, \quad \Re(x) > -1;$$

für die entsprechende Funktion $g(x)$ ergibt sich so der Ausdruck:

$$g(x) = \frac{1}{x} \cdot \varrho(x),$$

wo der Kürze halber:

$$\varrho(x) = \sum_{s=2}^{s=\infty} (-1)^s \log s \cdot x^{s-1} \tag{7}$$

gesetzt worden ist. Somit erhält man aus § 90, (4) die Integraldarstellung:

$$\varrho\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2i} \cdot \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\log(1+z) \cdot x^{-z}}{\sin \pi z}\, dt, \quad -1 < a < +1, \tag{8}$$

wo man noch $-\pi < \theta < +\pi$ voraussetzen muß.

Es ist wohlbekannt[1]), daß die Funktion $\varrho(x)$ in der ganzen x-Ebene nur die zwei singulären Stellen $x = -1$ und $x = \infty$ besitzen kann.

§ 92. Anwendungen auf $\beta(x)$ und $\Psi(x) + C$.

Als weitere Beispiele für unsere allgemeine Formel wollen wir noch die beiden Funktionen:

$$\beta(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\, dt, \quad \Re(x) > 0 \tag{1}$$

und:

$$\Psi(x) + C = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{s+1} \cdot \binom{x-1}{s+1}, \quad \Re(x) > 0 \tag{2}$$

heranziehen. Aus (1) folgt vermöge der Integralformel § 89, (8) unmittelbar:

$$f(x) = \frac{\log 2 + \log(1-x)}{1-2x}, \quad g(x) = \frac{\log 2 - \log(1+x)}{1-x}, \tag{3}$$

1) Hadamard, La série de Taylor, p. 63; Paris 1901.

während die Definitionen § 89, (3), (4) für die der Funktion $\Psi(x) + C$ entsprechenden Funktionen die Ausdrücke:

$$f(x) = \log(1-x), \quad g(x) = -\frac{1}{1+x} \cdot \log(1+x) \tag{4}$$

liefern. Demnach ergeben sich mittels § 89, (9) die folgenden beiden Integraldarstellungen:

$$\frac{\pi \beta(x)}{\sin \pi x} = \int_0^1 \frac{\log(2t)}{2t-1} \cdot \frac{t^{x-1}}{(1-t)^x} dt, \tag{5}$$

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} (\Psi(x) + C) = \int_0^1 \frac{\log t \cdot t^{x-1}}{(1-t)^x} dt, \quad 0 < \Re(x) < 2; \tag{6}$$

daraus aber folgen wegen § 5 die ähnlichen Darstellungen:

$$\left(\frac{\pi}{\sin \pi x}\right)^2 = \int_0^1 \frac{\log t - \log(1-t)}{2t-1} \cdot \frac{t^{x-1}}{(1-t)^x} dt, \quad 0 < \Re(x) < 1 \tag{7}$$

$$\frac{\pi^2 \cos \pi x}{\sin^2 \pi x} = \int_0^1 \frac{\log(1-t) - \log t}{(1-t)^x} \cdot t^{x-1} dt, \quad 0 < \Re(x) < 1. \tag{8}$$

Nach diesen Erörterungen findet man aus (5) und (7):

$$\frac{\log 2 - \log(1+x)}{1-x} = \frac{1}{2i} \cdot \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\beta(z)}{\sin \pi z} \cdot x^{-z} dz, \tag{9}$$

$$\frac{\log x}{x-1} = \frac{\pi}{2i} \cdot \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{x^{-z}}{\sin^2 \pi z} dz, \tag{10}$$

vorausgesetzt, daß $0 < a < 1$ und in (9) $-\pi < \theta < +\pi$ angenommen wird; in (10) müssen sonach die beiden Werte $x = 0$ und $x = \infty$ ausgeschlossen werden.

In ähnlicher Weise findet man aus (6) und (8) die entsprechenden Darstellungen:

$$-\frac{\log(1+x) + C}{1+x} = \frac{1}{2i} \cdot \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\Psi(z)}{\sin \pi z} \cdot x^{-z} dz, \tag{11}$$

$$(12)\qquad -\frac{\log x}{1+x} = \frac{\pi}{2i} \cdot \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\cos \pi z}{\sin^2 \pi z} \cdot x^{-z}\, dz,$$

wo man $0 < a < 1$ und $-\pi < \theta < +\pi$ annehmen muß.

Wir haben hier noch die Formel § 89, (6) anzuwenden, die für unsere zu Beispielen erwählten Funktionen zu sehr ähnlichen Resultaten führt. Die in § 20, (6) und § 75, (6) betrachtete Funktion:

$$(13)\qquad \eta(x) = \int\limits^{1} \frac{\log 2 - \log(1+t)}{1-t} \cdot t^{x-1}, \quad \Re(x) > 0,$$

gibt erstens ohne Mühe:

$$(14)\qquad \frac{\pi \beta(x)}{\sin \pi x} = \Psi^{(1)}(x) - \eta(x) + \eta(1-x).$$

Zweitens finden wir die in § 20, (9) und § 75, (9) eingeführte Funktion:

$$(15)\qquad \xi_1(x) = \int\limits_0^1 \frac{\log(1+t)}{1+t} \cdot t^{x-1}\, dt, \quad \Re(x) > 0$$

wieder und erhalten so die (14) ähnliche Formel:

$$(16)\qquad \frac{\pi}{\sin \pi x}\,(\Psi(x) + C) = \beta^{(1)}(x) - \xi_1(x) - \xi_1(1-x).$$

Die beiden Formeln (13) und (15) führen unmittelbar zu Partialbruchentwicklungen für $\eta(x)$ und $\xi_1(x)$; wir finden in der Tat:

$$(17)\qquad \eta(x) = \sum_{s=0}^{s=8} \frac{\log 2 - \lambda_1(s)}{x+s},$$

$$(18)\qquad \xi_1(x) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^{s-1}\lambda(s)}{x+s},$$

wo der Kürze halber:

$$\lambda_1(0) = 0, \quad \lambda_1(n) = \sum_{s=1}^{s=n} \frac{(-1)^{s-1}}{s},$$

$$\lambda(0) = 0, \quad \lambda(n) = \sum_{s=1}^{s=n} \frac{1}{s}$$

gesetzt worden ist.

Für die Funktion $\eta(x)$ finden wir ferner aus (13), daß:

$$(19)\quad \Delta\eta(x) = -\int_{t=0}^{1} (\log 2 - \log(1+t))t^{x-1}\,dt = -\frac{1}{x}\cdot\beta(x+1)$$

sein muß. Daraus folgt dann unmittelbar:

$$(20)\qquad \eta(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\beta(x+s+1)}{x+s} = -\Delta^{-1}\left(\frac{1}{x}\cdot\beta(x+1)\right).$$

DRITTER TEIL

THEORIE DER FAKULTÄTENREIHEN

Kapitel XVII.

Fundamentaleigenschaften der Fakultätenreihen.

§ 93. Über die Konvergenz einer Fakultätenreihe.

Wir werden nunmehr die reziproke Gammafunktion als Entwicklungsfunktion anwenden, indem wir Reihen von der Form:

$$G(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!\,a_s}{\Gamma(x+s+1)} \tag{1}$$

untersuchen wollen, in denen die Koeffizienten a_s sämtlich von x unabhängig sind. Setzen wir der Kürze halber:

$$\Gamma(x)\,G(x) = \Omega(x), \tag{2}$$

so gelangen wir von (1) aus unmittelbar zu folgender Entwicklung:

$$\Omega(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!\,a_s}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+s)}. \tag{3}$$

Diese Reihe $\Omega(x)$ heißt allgemein eine *Fakultätenreihe*.

Eine Vergleichung der beiden Reihen (1) und (3) zeigt ohne weiteres, daß diese Reihen gleichzeitig konvergieren oder divergieren müssen, außer vielleicht in den Punkten:

$$0,\ -1,\ -2,\ -3,\ -4,\ \cdots, \tag{4}$$

wo die Glieder der Reihe $\Omega(x)$ unendlich groß werden, falls diese Reihe für solche Werte überhaupt einen Sinn hat. Die Funktion $\Omega(x)$ selbst kann eventuell in den Punkten (4) einfache Pole haben.

Wir definieren daher stets den Konvergenzbereich der Fakultätenreihe (3) als denjenigen Bereich, in welchem die Reihe (1) konvergiert. Der Konvergenzbereich von $\Omega(x)$ *kann* somit einfache Pole dieser Funktion enthalten; ist aber ω ein solcher Pol, so konvergiert die Reihe $\Omega(x)$ sicher, wenn nur $|x-\omega|$ eine angebbare Größe von beliebiger Kleinheit übersteigt.

Für die Konvergenz der Fakultätenreihe $\Omega(x)$ liefert der Grenzwert § 21, (2) unmittelbar zwei Sätze, welche den in § 49 für die Binomialkoeffizientenreihen hergeleiteten sehr ähnlich sind; nur fällt hier die Bedingung, daß $|x|$ endlich sein muß, weg.

I. *Der Bereich der absoluten Konvergenz der Fakultätenreihe* (3) *ist die unbegrenzte Halbebene, die rechts von einer gewissen auf der Achse der reellen Zahlen senkrecht stehenden geraden Linie liegt.*

Konvergiert nämlich die Reihe:

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} \left| \frac{s!\,a_s}{x(x+1)\cdots(x+s)} \right|, \tag{5}$$

so wird die andere Reihe:

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} \left| \frac{s!\,a_s}{x_1(x_1+1)\cdots(x_1+s)} \right| \tag{6}$$

wegen § 21, (2) dieselbe Eigenschaft besitzen, falls $\Re(x_1) > \Re(x)$ angenommen wird; ist umgekehrt die Reihe (5) divergent, so muß dies offenbar auch mit (6) der Fall sein, wenn $\Re(x_1) \leqq \Re(x)$ angenommen wird. Natürlich setzen wir dabei voraus, daß x_1 bzw. x nicht mit den Werten (4) zusammenfallen.

Als eine direkte Anwendung des Grenzwertes § 21, (2) hat man ferner den zweiten Satz:

II. *Wenn die Glieder der Reihe* (3) *für einen gewissen endlichen Wert α von x sämtlich endlich sind, so konvergiert die Reihe $\Omega(x)$ sicher unbedingt, falls $\Re(x-\alpha) > 1$ vorausgesetzt wird.*

Da der Bereich der unbedingten Konvergenz von $\Omega(x)$ eine unbegrenzte Halbebene ist, so läßt sich der weitere Satz folgern:

III. *Falls eine vorgelegte Funktion in eine Fakultätenreihe entwickelt werden kann, ist diese Darstellung nur auf eine Weise möglich; die Fakultätenreihen gestatten somit keine Nullentwicklung.*

Es sei nämlich:

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!\,a_s}{x(x+1)\cdots(x+s)} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!\,a_s'}{x(x+1)\cdots(x+s)}, \tag{7}$$

wo die beiden Fakultätenreihen für endliche Werte von x konvergieren. Die Multiplikation mit x ergibt dann für $|x| = \infty$, daß $a_0 = a_0'$ sein muß; multipliziert man hinwiederum mit $x+1$, so ergibt die Annahme $x = \infty$, daß $a_1 = a_1'$ sein muß usw. Die Identität (7) ist dann und zwar nur dann möglich, wenn für jeden Wert von n die Gleichung $a_n = a_n'$ gilt.

§ 94. Integraldarstellung von $\Omega(x)$.

Um eine wirkliche Theorie der Fakultätenreihe:

$$(1) \qquad \Omega(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!\,a_s}{x(x+1)\cdots(x+s)}$$

liefern zu können, haben wir diese Reihe $\Omega(x)$ vor allem als ein spezielleres Integral der Gattung $\mathfrak{B}(x)$ darzustellen. Zu dem Ende führen wir die Funktion § 3, (7) ein und finden:

$$(2) \qquad \frac{n!\,a_n}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \frac{a_n \mathfrak{F}_{n+1}(x)}{(n+1)^x}.$$

Daraus folgt zunächst der wichtige Hilfssatz:

I. *Wenn die Fakultätenreihe $\Omega(x)$ überhaupt für einen endlichen Wert von x konvergiert, so ist der Konvergenzradius dieser Potenzreihe:*

$$(3) \qquad \varphi(1-t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots$$

mindestens gleich 1. *Ist dieser Konvergenzradius größer als* 1, *so konvergiert die Fakultätenreihe* (1) *sicher für jeden endlichen Wert von x, der nicht gleich Null oder einer negativen ganzen Zahl ist, und umgekehrt.*

Aus (3) findet man weiter:

$$\frac{(-1)^n}{n!} \cdot \varphi^{(n)}(1-t) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \binom{n+s}{s} a_{n+s} \cdot t^s$$

und daraus:

$$(4) \quad \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \varphi^{(n)}(1-t)(1-t)^{x+n-1} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \binom{n+s}{s} a_{n+s} t^s \cdot (1-t)^{x+n-1}.$$

Diese Reihe hat aber offenbar folgende drei Eigenschaften:

1) Sie ist im Intervalle $0 \leq t < 1$ gleichmäßig konvergent.

2) Die einzelnen Glieder sind, für $\Re(x+n) > 0$, von $t = 0$ bis $t = 1$ in t integrabel.

3) Wie die Integraldarstellung § 53, (1) für $B(x, y)$ zeigt, so wird die Reihe, welche man aus (4) durch *formale* gliedweise Integration von $t = 0$ bis $t = 1$ erhält, nichts anders als das Restglied der Reihe $\Omega(x)$ selbst; sie ist daher sicher konvergent, wenn dies mit $\Omega(x)$ der Fall ist.

Ein bekannter Satz[1]) zeigt dann, daß die Reihe (4) von $t = 0$ bis $t = 1$ gliedweise integriert werden darf. Damit ist folgender wichtige Satz bewiesen:

II. *Falls die Fakultätenreihe* $\Omega(x)$ *konvergiert, und die ganze, nicht negative Zahl* n *so bestimmt wird, daß* $\Re(x+n) > 0$ *ist, so hat man allgemein:*

$$(5)\qquad \frac{(-1)^n}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}\cdot\int_0^1 \varphi^{(n)}(t)\,t^{x+n-1}dt = \sum_{s=n}^{s=\infty}\frac{s!\,a_s}{x(x+1)\cdots(x+s)}$$

und speziell für $n = 0$*:*

$$(6)\qquad \Omega(x) = \int_0^1 \varphi(t)\cdot t^{x-1}dt.$$

Betreffs der Funktion $\varphi(t)$ kann man nun ohne Mühe folgenden Satz beweisen:

III. *Falls die Fakultätenreihe* $\Omega(x)$ *konvergiert, ist es möglich, eine solche positive ganze Zahl* N *zu bestimmen, daß die Ungleichung:*

$$(7)\qquad \left|\frac{\varphi^{(n)}(t)\,t^{x+n}}{\Gamma(x+n+1)}\right| < \varepsilon$$

in dem ganzen Intervalle $0 \leqq t \leqq 1$ *richtig bleibt, wenn* ε *eine vorgegebene positive Größe von beliebiger Kleinheit bedeutet, und* $n \geqq N$ *angenommen wird.*

Aus (5) hat man in der Tat für $n \geqq N$:

$$\left|\int_1^t \frac{\varphi^{(n)}(t)\,t^{x+n-1}dt}{\Gamma(x+n)}\right| < \frac{\varepsilon}{3};\qquad 1 \geqq t \geqq 0,$$

daraus folgt nach einer partiellen Integration:

$$\left|\frac{\varphi^{(n)}(t)\,t^{x+n}}{\Gamma(x+n+1)} - \frac{(-1)^n n!\,a_n}{\Gamma(x+n+1)} - \int_1^t \frac{\varphi^{(n+1)}(t)\,t^{x+n}dt}{\Gamma(x+n+1)}\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Damit ist unser Satz bewiesen.

Wir wollen in diesem Zusammenhang noch einen spezielleren Satz herleiten, den wir folgendermaßen aussprechen können:

IV. *Wenn die Fakultätenreihe* $\Omega(x)$ *für einen willkürlichen endlichen Wert von* x *konvergiert, ausgenommen* $x = 0, -1, -2, \cdots$, *so ist die Funktion* $\varphi(t)$ *auch im Bereiche von* $t = 0$ *analytisch, und die Potenzreihe:*

$$(8)\qquad \varphi(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \cdots$$

1) U. Dini, Grundlagen, p. 523.

ist sicher für $|t| < 1$ *konvergent. Das Umgekehrte ist aber nicht richtig.*

Bedeutet nämlich n eine ganze, nicht negative Zahl, so hat die Funktion $\Omega(x)$ im Punkte $x = -n$ einen einfachen Pol mit dem Residuum:

$$b_n = (-1)^n \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \binom{n+s}{s} a_{n+s}; \tag{9}$$

es ist aber wegen (3):

$$b_n = \frac{1}{n!} \cdot \varphi^{(n)}(0).$$

Damit ist unser Satz bewiesen, denn die numerische Reihe rechter Hand in (9) ist ja den Sätzen I und II des § 93 zufolge sicher konvergent.

§ 95. Herleitung eines Hilfssatzes.

Durch die Formeln § 94, (6), (7) haben wir eine *notwendige* Bedingung angegeben, der eine Funktion genügen muß, um in eine Fakultätenreihe entwickelt werden zu können. Wir wollen nunmehr beweisen, daß diese Bedingung auch eine *hinreichende* ist, müssen aber zu dem Ende zunächst noch einen Hilfssatz herleiten.

Wir definieren eine Funktion $\varphi(t)$, die folgenden drei Bedingungen genügt:

1) $\varphi(t)$ ist im Bereiche der Stelle $t = 1$ analytisch, und die entsprechende Potenzreihe:

$$\varphi(1-t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots \tag{1}$$

ist im Innern des Kreises $|t| = 1$ sicher konvergent.

2) Die Stelle $t = 0$ kann für $\varphi(t)$ singulär sein; in diesem Falle müssen aber Ableitungen willkürlicher Ordnung von $\varphi(t)$ für $t = +0$ existieren. Ist $\varphi^{(p)}(t)$ die erste dieser Ableitungen, die für $t = +0$ unendlich groß wird, so muß es möglich sein, eine reelle Zahl λ, $-\infty \leqq \lambda < +\infty$, so zu bestimmen, daß:

$$\lim_{t=+0} |t^{x+p} \cdot \varphi^{(p)}(t)| = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases} \tag{2}$$

wird, je nachdem $\Re(x) \gtrless \lambda$ vorausgesetzt wird.

3) Die Funktion $\varphi(1-t)$ kann auf der Peripherie des Kreises $|t| = 1$ andere singuläre Stellen außer $t = 1$ besitzen; es muß dann möglich sein, eine reelle Zahl λ', $-\infty \leqq \lambda' < +\infty$, so zu bestimmen, daß:

$$(3)\qquad \lim_{t=1-0}\left|\frac{\varphi^{(n)}(t)\,t^{x+n}}{\Gamma(x+n+1)}\right| \begin{matrix} <\varepsilon \\ >\varepsilon^{-1} \end{matrix}$$

wird, je nachdem $\Re(x) \gtrless \lambda'$ vorausgesetzt wird, wenn $n \geqq N$ ist, wo N eine hinlänglich große, positive, ganze Zahl bedeutet, während ε eine vorgegebene positive Größe von beliebiger Kleinheit ist.

Die zwei Zahlen λ und λ' nennen wir die *kritischen Zahlen der Funktion* $\varphi(t)$.

Unter der Annahme dieser Voraussetzungen für $\varphi(t)$ beweisen wir nunmehr folgenden Hilfssatz:

I. *Es sei t eine reelle Zahl, so daß $0 < t \leqq 1$ ist, während $\Re(x) > \lambda$ angenommen wird, dann ist es möglich, eine positive ganze Zahl N so zu bestimmen, daß für $n \geqq N$ immer:*

$$(4)\qquad \left|\frac{(1-t)^{x+n}\varphi^{(n)}(1-t)}{\Gamma(x+n+1)}\right| < \varepsilon$$

wird, wo ε eine vorgegebene positive Größe von beliebiger Kleinheit bedeutet.

Wir denken uns vorläufig $\varphi(+0)$ unendlich groß, so daß in (2) $p=0$, $\lambda \geqq 0$ anzunehmen ist; weiter setzen wir:

$$(1-t)^x\varphi(1-t) = g(t), \qquad \varphi(1-t) = (1-t)^{-x}g(t)$$

und erhalten so nach n-maliger Differentiation nach x:

$$(5)\qquad \frac{(-1)^n(1-t)^{x+n}\varphi^{(n)}(1-t)}{n!} = \sum_{s=0}^{s=n}\binom{-x}{s}\cdot\frac{(1-t)^{n-s}}{(n-s)!}\cdot g^{(n-s)}(t).$$

Wir beschreiben jetzt mit t als Mittelpunkt und mit dem Radius $1-t$ einen Kreis C', der also den Konvergenzkreis C für die Potenzreihe (1) im Punkte $t=1-0$ berühren muß. Offenbar muß dann $g(t)$ für $\Re(x) > \lambda$ in jedem Punkte der Peripherie des Kreises C', auch in $t = 1-0$, einen endlichen Wert besitzen. Nach einem Satze von Cauchy[1]) erhalten wir sonach den Majorantwert:

$$(6)\qquad \frac{(1-t)^p}{p!}\,|g^{(p)}(t)| < M,$$

wo M eine gewisse endliche Größe nicht übersteigt, p aber eine willkürliche positive, ganze Zahl bedeutet.

Nun ist aber nach § 21, (4):

$$\left|\binom{-x}{s}\right| = \frac{s^{\Re(x)-1}}{|\mathfrak{F}_s(x)|};$$

1) E. Picard, Traité d'Analyse, Bd. II, p. 111; Paris 1893.

wegen (5) und (6) folgt daraus, wenn man $x = \alpha + i\beta$ setzt:

$$|(1-t)^{x+n}\varphi^{(n)}(1-t)| < n!\left[M + kn^{\alpha}\cdot\sum_{s=1}^{s=n}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{s}{n}\right)^{\alpha-1}\right],$$

wo k eine positive *endliche* Größe bedeutet, und demnach weiter:

$$(7)\quad \left|\frac{(1-t)^{x+n}\varphi^{(n)}(1-t)}{\Gamma(x+n+1)}\right| < \left|\frac{\mathfrak{F}_n(x+1)}{\Gamma(x+1)}\right|\cdot\left[n^{-\alpha}M + k\cdot\sum_{s=1}^{s=n}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{s}{n}\right)^{\alpha-1}\right],$$

ferner hat man bekanntlich:

$$\sum_{s=1}^{s=n}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{s}{n}\right)^{\alpha-1} < \int_0^1 t^{\alpha-1}dt = \frac{1}{\alpha};$$

daraus folgt wegen § 21, (2) und (7), wenn δ eine positive Größe von beliebiger Kleinheit bedeutet:

$$(8)\quad \left|\frac{(1-t)^{x+\delta+n}\varphi^{(n)}(1-t)}{\Gamma(x+\delta+n+1)}\right| < k_2\cdot n^{-\delta},$$

wo k_2 hinwiederum eine *endliche* positive Größe bedeutet, wie groß auch n angenommen wird. Damit ist aber unser Satz für $0 < t < 1$ und $\lambda > 0$ bewiesen.

Die Stelle $t = 1 - 0$ erfordert eine spezielle Untersuchung, weil der entsprechende Kreis C' dann unendlich klein wird. Wir erkennen zunächst, daß unser Satz für $n = 0$ richtig ist, denn er ist dann eine direkte Folge der Voraussetzung (2). Nehmen wir nun an, unser Satz sei auch für n richtig, und setzen wir der Kürze halber:

$$\frac{(1-t)^{x+n}\varphi^{(n)}(1-t)}{\Gamma(x+n+1)} = \varphi_n(t),$$

so ist sicher:

$$(9)\quad \lim_{t=1-0}|\varphi_n(t)| = 0;$$

die Differentiation nach t ergibt aber:

$$\frac{(1-t)\varphi_n^{(1)}(t)}{x+n+1} = -\frac{x+n}{x+n+1}\cdot\varphi_n(t) - \varphi_{n+1}(t).$$

Einem bekannten Satze[1]) zufolge ist daher auch:

$$\lim_{t=1-0}|\varphi_{n+1}(t)| = 0.$$

Damit ist unser Satz für das ganze Intervall $0 < t \leqq 1$ und für $\lambda > 0$ vollständig bewiesen.

1) U. Dini, Grundlagen, p. 104.

In dem Falle, wo λ negativ ist, kann man eine positive ganze Zahl p so bestimmen, daß $-p \leqq \lambda < -p+1$ ist, und die vorhergehende Schlußweise bleibt dann anwendbar, falls man $\varphi^{(p)}(t)$ statt $\varphi(t)$ in $g(t)$ einführt.

Wir heben noch zwei speziellere Fälle hervor, die gleichfalls durch die vorhergehende Schlußweise bewiesen werden können:

II. *Ist $t = 1$ die einzige singuläre Stelle von $\varphi(t)$ auf der Peripherie des Kreises $|t| = 1$, so bleibt die Ungleichung* (4) *auch für $t = 0$ richtig.*

III. *Ist der Konvergenzradius der Potenzreihe* (1) *größer als* 1, *so bleibt die Ungleichung* (4) *im ganzen Intervalle $0 \leqq t \leqq 1$ richtig, auch wenn $\mathfrak{R}(x)$ negativ angenommen wird, wenn nur $|\mathfrak{R}(x)|$ eine gewisse endliche Grenze nicht überschreitet.*

§ 96. Bestimmung der Funktionen, die in eine Fakultätenreihe entwickelt werden können.

Mit Zuhilfenahme der Resultate des § 95 ist es leicht, folgenden allgemeinen Satz zu beweisen:

I. *Die notwendige und hinreichende Bedingung, der eine Funktion $\Omega(x)$ genügen muß, um in eine Fakultätenreihe entwickelt werden zu können, besteht darin, daß sich $\Omega(x)$ als bestimmtes Integral der Gattung $\mathfrak{B}(x)$, nämlich:*

$$\Omega(x) = \int_0^1 \varphi(t) t^{x-1} dt \tag{1}$$

darstellen läßt, wo $\varphi(t)$ den Bedingungen des § 95 Genüge leisten muß. Die so erhaltene Fakultätenreihe ist dann in der durch die Ungleichungen $\mathfrak{R}(x) > \lambda$, $\mathfrak{R}(x) > \lambda'$ definierten Halbebene gleichmäßig konvergent.

Erstens bemerken wir, daß das bestimmte Integral (1) einen Sinn nur hat, wenn $\mathfrak{R}(x) > \lambda$ oder wenn, falls $t = 0$ für $\varphi(t)$ eine reguläre Stelle ist, $\mathfrak{R}(x) > 0$ angenommen wird; unter diesen Voraussetzungen findet man dann durch wiederholte partielle Integration:

$$\Omega(x) = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{s!\,a_s}{x(x+1)\cdots(x+s)} + R_n(x), \tag{2}$$

wo der Kürze halber:

$$R_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{x(x+1)\cdots(x+n)} \cdot \int_0^1 \varphi^{(n)}(t) t^{x+n} dt \tag{3}$$

gesetzt worden ist, n aber eine willkürliche positive, ganze Zahl bedeutet.

Nimmt man aber in (3) auch $\Re(x) > \lambda'$ an, so ist es möglich, eine positive ganze Zahl N so zu bestimmen, daß für $n \geqq N$ immer:

(4) $$|R_n(x)| < \varepsilon$$

wird. Damit ist unser Satz bewiesen.

Setzt man in (1) $t = e^{-z}$ und

(5) $$\varphi(e^{-z}) = f(z), \quad \varphi(t) = f(-\log t),$$

so folgt für $\Omega(x)$ die weitere Integraldarstellung:

(6) $$\Omega(x) = \int_0^\infty f(z) e^{-zx} dz,$$

die überall einen Sinn hat, wo dies mit (1) der Fall ist.

Aus (4) ergibt sich unmittelbar der folgende Satz, der ohne Beweis von Jensen[1]) angegeben worden ist:

II. *Der vollständige Konvergenzbereich einer Fakultätenreihe ist die unbegrenzte Halbebene, welche rechts von einer gewissen auf der Achse der reellen Zahlen senkrecht stehenden geraden Linie gelegen ist.*

Eine Anwendung von § 93, II ergibt weiter den Satz von Pincherle[2]):

III. *Die Fakultätenreihe $\Omega(x)$ ist sicher für $\Re(x) > \lambda' + 1$ unbedingt konvergent, so daß die beiden kritischen Zahlen λ und λ' der Bedingung $\lambda \leqq \lambda' + 1$ genügen müssen.*

Da nämlich allgemein:

$$a_n = (-1)^n \varphi^{(n)}(1)$$

zu setzen ist, so bleiben die Glieder in $\Omega(x)$ wegen § 95, (3) sämtlich endlich, falls $\Re(x) > \lambda'$ angenommen wird. Aus § 93, II ergibt sich ferner der Satz:

IV. *Die Breite des unendlichen Parallelstreifens der x-Ebene, auf dem eine Fakultätenreihe nur bedingt konvergiert, kann niemals die Einheit übersteigen.*

Nach diesen allgemeinen Erörterungen wollen wir nunmehr den Konvergenzbereich unserer Fakultätenreihe näher diskutieren, indem wir folgende Fälle besonders betrachten.

V. *Der Konvergenzradius der Potenzreihe für $\varphi(1-t)$ sei größer als 1; der Konvergenzbereich von $\Omega(x)$ ist dann die ganze unbegrenzte*

1) Nyt Tidsskrift for Mathematik, Bd. 2B, p. 69; 1891.

2) Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei; Februar 1902.

x-Ebene mit Ausnahme der sehr entfernten Punkte der Achse der negativen Zahlen.

Dieser Satz rührt schon von Pincherle[1]) her.

Als Beispiele benutzen wir die drei Funktionen:

$$
(7)\quad \begin{cases}
\beta(x) = \int\limits_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt = \sum\limits_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!}{x(x+1)\cdots(x+s)} \cdot \frac{1}{2^{s+1}}, \\
P(x) = \int\limits_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt = \frac{1}{e} \cdot \sum\limits_{s=0}^{s=\infty} \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+s)}, \\
\mathfrak{P}(x) = \int\limits_0^1 e^{t} t^{x-1} dt = e \cdot \sum\limits_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{x(x+1)\cdots(x+s)}.
\end{cases}
$$

VI. *Ist* $\lambda' \geqq \lambda$, *so konvergiert* $\Omega(x)$ *für* $\Re(x) > \lambda'$, *und zwar nur bedingt, falls* $\lambda' < \Re(x) < \lambda' + 1$ *angenommen wird.*

Für die Funktion:

$$
(8)\qquad a(x) = \int\limits_0^1 \frac{t^{x-1}}{2-t}\,dt = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{1}{2^{s+1}} \cdot \frac{1}{x+s}
$$

ist z. B. $\lambda = -\infty$, $\lambda' = 0$; die entsprechende Fakultätenreihe:

$$
(9)\qquad a(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s s!}{x(x+1)\cdots(x+s)}
$$

ist daher für $0 < \Re(x) < 1$ nur bedingt, für $\Re(x) > 1$ aber unbedingt konvergent.

VII. *Ist* $\lambda' = \lambda - k$, $0 < k < 1$, *so konvergiert* $\Omega(x)$ *für* $\Re(x) > \lambda$, *aber nur bedingt für* $\lambda < \Re(x) < \lambda + 1 - k$.

VIII. *Ist* $\lambda' = \lambda - 1$, *so ist* $\Omega(x)$ *stets unbedingt konvergent und zwar für* $\Re(x) > \lambda$.

Für die Funktion:

$$
(10)\qquad \frac{1}{x-\alpha} = \int\limits_0^1 t^{-\alpha} \cdot t^{x-1} dt, \qquad \Re(x-\alpha) > 0
$$

hat man z. B. $\lambda = \Re(\alpha)$, $\lambda' = \Re(\alpha) - 1$; die Reihe:

$$
(11)\qquad \frac{1}{x-\alpha} = \frac{1}{x} + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+s-1)}{x(x+1)\cdots(x+s)}
$$

ist daher für $\Re(x) > \Re(\alpha)$ stets unbedingt konvergent.

---

1) Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. 2, p. 226; 1888.

Für:

$$\frac{1}{x^p} = \frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!} \cdot \int_0^1 (\log t)^{p-1} t^{x-1} dt, \qquad \Re(x) > 0 \tag{12}$$

ist $\lambda = 0$, $\lambda' = -1$; daraus folgt für positive $\Re(x)$ die stets unbedingt konvergente Entwicklung:

$$\frac{1}{x^p} = \sum_{s=p}^{s=\infty} \frac{C_s^{s-p}}{x(x+1)\cdots(x+s-1)}. \tag{13}$$

Als drittes Beispiel nehmen wir:

$$\Omega(x) = \int_0^1 (1-t^n)^{-\alpha}(1-t)^{x-1} dt, \qquad \Re(x) > \Re(\alpha), \tag{14}$$

wo n eine positive ganze Zahl bedeutet. Es ist demnach:

$$\varphi(1-t) = (1-t^n)^{-\alpha} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \binom{\alpha}{s} \cdot t^{ns}, \qquad |t| < 1;$$

daraus folgt, wenn r nicht durch n teilbar ist, $\varphi^{(r)}(1) = 0$ und speziell:

$$(-1)^{np} \varphi^{(np)}(1) = (np)! \binom{\alpha}{p}.$$

Somit ist hier $\lambda = \Re(\alpha)$, $\lambda' = \Re(\alpha) - 1$ anzunehmen, so daß die Reihe:

$$\Omega(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(ns)!}{x(x+1)\cdots(x+ns)} \cdot \binom{\alpha}{s} \tag{15}$$

für $\Re(x) > \Re(\alpha)$ stets unbedingt konvergieren muß.

Aus (1) folgt noch der Satz:

IX. *Die willkürliche Fakultätenreihe $\Omega(x)$ kann immer durch Zuhilfenahme der allgemeinen Formel* § 49, (2) *in eine Binomialkoeffizientenreihe entwickelt werden.*

§ 97. Konjugierte Funktionen.

Wir setzen jetzt speziell voraus, daß die Funktion $\varphi(t)$ im Innern der beiden Kreise $|t| = 1$ und $|t-1| = 1$ analytisch ist, so daß die Potenzreihen:

$$\varphi(1-t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots, \tag{1}$$

$$\varphi(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \cdots \tag{2}$$

sicher für $|t| < 1$ konvergieren.

Weiter setzen wir voraus, daß es möglich sei, zwei reelle Zahlen λ_1' und λ_2' so zu bestimmen, daß:

$$(3)\qquad \lim_{n=\infty}\left|\frac{\varphi^{(n)}(1)}{\Gamma(x+n+1)}\right| = \begin{cases}0\\ \infty\end{cases}, \qquad \lim_{n=\infty}\left|\frac{\varphi^{(n)}(0)}{\Gamma(x+n+1)}\right| = \begin{cases}0\\ \infty\end{cases}$$

wird, je nachdem $\Re(x) \gtrless \lambda_1'$ bzw. $\Re(x) \gtrless \lambda_2'$ angenommen wird.

Dem Satze § 96, VI zufolge konvergieren dann die beiden Fakultätenreihen:

$$(4)\qquad F(x) = \int_0^1 \varphi(t) t^{x-1} dt = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s! a_s}{x(x+1)\cdots(x+s)},$$

$$(5)\qquad F_1(x) = \int_0^1 \varphi(1-t) t^{x-1} dt = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s s! b_s}{x(x+1)\cdots(x+s)},$$

falls $\Re(x) > \lambda_1'$ bzw. $\Re(x) > \lambda_2'$ angenommen wird.

Da die Integrale in (4) und (5) für $\Re(x) > 0$ beide einen Sinn haben müssen, so sind die Funktionen durch Binomialkoeffizientenreihen von folgender Form darstellbar:

$$(6)\qquad F(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s F_1(s+1) \cdot \binom{x-1}{s},$$

$$(7)\qquad F_1(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s F(s+1) \cdot \binom{x-1}{s},$$

die beide für $\Re(x) > 0$ konvergieren.

Bedenken wir endlich, daß die beiden Potenzreihen (1) und (2) von $t = 0$ bis $t = 1$ gliedweise integrierbar sind, so ergeben sich unmittelbar die Partialbruchentwicklungen:

$$(8)\qquad F(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{b_s}{x+s},$$

$$(9)\qquad F_1(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{a_s}{x+s}.$$

Funktionenpaare wie $F(x)$ und $F_1(x)$ nennen wir *konjugierte Funktionen*. Die in § 96 eingeführten Funktionen $\beta(x)$ und $\alpha(x)$, $P(x)$ und $\mathfrak{P}(x)$ sind daher konjugierte Funktionen.

Kapitel XVIII.

Algorithmus der Fundamentaloperationen.

§ 98. Herleitung einiger Hilfsformeln.

Die Addition oder Subtraktion zweier Fakultätenreihen kann man unmittelbar ausführen, indem man einfach die entsprechenden Koeffizienten oder die φ-Funktionen addiert oder subtrahiert. Um aber auch für die Multiplikation zweier solcher Reihen sowie für die Fundamentaloperationen der Analysis oder der Differenzenrechnung Algorithmen zu gewinnen, bedarf man noch weiterer Vorbereitungen.

Wir betrachten zunächst die beiden Funktionen:

$$\varphi_1(1-t) = a_0' + a_1't + a_2't^2 + a_3't^3 + \cdots, \tag{1}$$

$$\varphi_2(1-t) = a_0'' + a_1''t + a_2''t^2 + a_3''t^3 + \cdots \tag{2}$$

mit den beiden kritischen Zahlen λ_1 und λ_1' bzw. λ_2 und λ_2'; setzen wir ferner:

$$\varphi(t) = \varphi_1(t)\varphi_2(t), \tag{3}$$

so finden wir für die Koeffizienten der Potenzreihe:

$$\varphi(1-t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots \tag{4}$$

unmittelbar den allgemeinen Ausdruck:

$$a_n = \sum_{s=0}^{s=n} a'_{n-s} a_s''; \tag{5}$$

wir haben daher nur noch übrig, die beiden kritischen Zahlen λ und λ' für die Funktion $\varphi(t)$ zu bestimmen.

Aus der Definition (3) folgt erstens, daß allgemein:

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 \tag{6}$$

sein muß. Wenn nur eine der Funktionen $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$, z. B. $\varphi_1(t)$, in $t = 0$ eine reguläre Stelle hat, so wird zweitens:

$$\lambda = \lambda_2. \tag{7}$$

In dem dritten Falle endlich, daß sich sowohl $\varphi_1(t)$ als $\varphi_2(t)$ in $t = 0$ regulär verhalten, muß $\varphi(t)$ offenbar dieselbe Eigenschaft besitzen.

Was die zweite kritische Zahl λ' betrifft, so erhält man aus (3) oder (5) die Gleichung:

$$\frac{\varphi^{(n)}(1)}{n!} = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{\varphi_1^{(n-s)}(1)}{(n-s)!} \cdot \frac{\varphi_2^{(s)}(1)}{s!}. \tag{8}$$

Sind nun δ_1 und δ_2 zwei reelle Zahlen, so daß $\delta_1 > \lambda_1'$ und $\delta_2 > \lambda_2'$ ist, während die beiden Differenzen $\delta_1 - \lambda_1'$ und $\delta_2 - \lambda_2'$ beliebig klein angenommen werden dürfen, so ist offenbar wegen § 95, (3) und unter Anwendung der Funktion $\mathfrak{F}_n(x)$ für alle positiven ganzen n und $n = 0$:

$$\left| \frac{\varphi_1^{(n)}(1)}{n!} \right| < K \cdot (n+1)^{\delta_1}, \quad \left| \frac{\varphi_2^{(n)}(1)}{n!} \right| < L \cdot (n+1)^{\delta_2},$$

wo K und L positive endliche Größen bedeuten; somit ergibt sich aus (8) die Ungleichung:

$$\left| \frac{\varphi^{(n)}(1)}{n!} \right| < M \cdot \sum_{s=0}^{s=n} (n-s+1)^{\delta_1}(s+1)^{\delta_2}, \tag{9}$$

wo der Kürze halber $M = K \cdot L$ gesetzt worden ist; wir haben daher jeden der drei folgenden Fälle für sich zu untersuchen:

1) $\lambda_1' > -1$, $\lambda_2' > -1$; die Definition des bestimmten Integrals ergibt dann:

$$\left| \frac{\varphi^{(n)}(1)}{n!} \right| < M \cdot (n+1)^{\delta_1 + \delta_2 + 1} \cdot \int_0^1 t^{\delta_2}(1-t)^{\delta_1} dt;$$

daraus folgt wegen § 95, (3) unmittelbar:

$$\lambda' = \lambda_1' + \lambda_2' + 1. \tag{10}$$

2) $\lambda_1 > -1$, $\lambda_2 \leqq -1$; man hat dann, wenn $n_1 = \frac{n}{2}$ oder $n_1 = \frac{n-1}{2}$ vorausgesetzt wird, je nachdem n gerade oder ungerade ist, wegen (9):

$$\begin{aligned} \left| \frac{\varphi^{(n)}(1)}{n!} \right| < M \cdot \sum_{s=0}^{s=n_1} (n-s+1)^{\delta_1}(s+1)^{\delta_2} + \\ + M \cdot \sum_{s=0}^{s=n-n_1-1} (s+1)^{\delta_1}(n-s+1)^{\delta_2}. \end{aligned} \tag{11}$$

Nun ist aber offenbar:

$$\sum_{s=0}^{s=n_1} (n-s+1)^{\delta_1}(s+1)^{\delta_2} < (n+1)^{\delta_1} \cdot \sum_{s=0}^{s=n_1} (s+1)^{\delta_2}; \tag{12}$$

da aber die Reihe rechter Hand in (12) immer, selbst für $n = \infty$, eine endliche Summe hat, so ist es möglich, eine endliche positive Zahl K_2 so zu bestimmen, daß:

$$\left|\frac{\varphi^{(n)}(1)}{n!}\right| < M(n+1)^{\delta_2+1}\cdot\int_0^{\frac{1}{2}} t^{\delta_1}dt + K_2(n+1)^{\delta_1}$$

wird; daraus aber folgt:

(13) $$\lambda' \geqq \lambda_2' + 1, \quad \lambda' \geqq \lambda_1'.$$

3) $\lambda_1' \leqq -1$, $\lambda_2' \leqq -1$; hier ist die Ungleichung (12) für die beiden Summen rechter Hand in (11) anwendbar. Somit ist in diesem Falle:

(14) $$\lambda' \geqq \lambda_1', \quad \lambda' \geqq \lambda_2'$$

zu setzen.

Als Beispiel wollen wir die Funktion:

(15) $$\Omega(x-y) = \int_0^1 \varphi(t) t^{-y}\cdot t^{x-1}dt$$

untersuchen, wo $\varphi(t)$ die beiden kritischen Zahlen λ und λ' besitzen möge. Die entsprechenden Zahlen für t^{-y} sind, wie eine einfache Rechnung zeigt, $\Re(y)$ und $\Re(y)-1$; für die kritischen Zahlen Λ und Λ' der Funktion $\varphi(t)t^{-y}$ findet man daher die Ausdrücke:

(16) $$\Lambda = \lambda + \Re(y), \quad \Lambda = \Re(y),$$

je nachdem die Stelle $t = 0$ für $\varphi(t)$ singulär oder regulär ist.

Für die zweite kritische Zahl Λ' findet man in ähnlicher Weise:

(17) $$\begin{cases} \Lambda' = \lambda' + \Re(y); & & \lambda' > -1, & \Re(y) > 0, \\ \Lambda' \geqq \lambda' + 1, & \Lambda' \geqq \Re(y) - 1; & \lambda' \leqq -1, & \Re(y) > 0, \\ \Lambda' \geqq \lambda', & \Lambda' \geqq \Re(y); & \lambda' > -1, & \Re(y) \leqq 0, \\ \Lambda' \geqq \lambda', & \Lambda' \geqq \Re(y) - 1; & \lambda' \leqq -1, & \Re(y) \leqq 0. \end{cases}$$

Setzt man nun:

(18) $$\Omega(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!\,a_s}{x(x+1)\cdots(x+s)},$$

so ist demnach wegen (5):

(19) $$\Omega(x-y) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!\left(a_s + \binom{y}{1}a_{s-1} + \cdots + \binom{y+s-1}{s}a_0\right)}{x(x+1)\cdots(x+s)};$$

daraus folgt, wenn man $x+y$ statt x einführt:

(20) $$\Omega(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!\left(a_s + \binom{y}{1}a_{s-1} + \cdots + \binom{y+s-1}{s}a_0\right)}{(x+y)(x+y+1)(x+y+2)\cdots(x+y+s)}.$$

§ 99. Multiplikation zweier Fakultätenreihen.

Wir suchen nun das Produkt der zwei Fakultätenreihen:

$$(1) \qquad \Omega(x) = \int_0^1 \varphi(t) t^{x-1} dt = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!\, a_s}{x(x+1)\cdots(x+s)},$$

$$(2) \qquad \Omega_1(x) = \int_0^1 \psi(t) t^{x-1} dt = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!\, b_s}{x(x+1)\cdots(x+s)},$$

die für $\Re(x) > \lambda$ bzw. $\Re(x) > \lambda_1$ konvergieren.

Beide Reihen sind sicher für $\Re(x) > \lambda + 1$ bzw. $\Re(x) > \lambda_1 + 1$ *unbedingt* konvergent, und ihr Produkt kann somit nach der Regel von Cauchy gebildet werden; allein es leuchtet ein, daß diese Methode nur unter großen Schwierigkeiten zu einem übersichtlichen Resultate führen kann, was namentlich auch für die Beantwortung der Frage gilt, ob das Produkt $\Omega(x) \cdot \Omega_1(x)$ wieder in eine Fakultätenreihe entwickelt werden kann.

Die aus § 46, (6), (7) stammende Produktformel:

$$(3) \qquad \Omega(x) \cdot \Omega_1(x) = \int_0^1 \chi(t) t^{x-1} dt,$$

wo der Kürze halber:

$$(4) \qquad \chi(t) = \int_t^1 \frac{\varphi(z)}{z} \cdot \psi\left(\frac{t}{z}\right) dz$$

gesetzt worden ist, bietet offenbar für eine vollständige Lösung des Problems auch ihre besonderen Schwierigkeiten dar.

Daher scheint es uns angemessen, einen ganz anderen Weg einzuschlagen, indem wir zuerst das speziellere Produkt:

$$(5) \qquad \frac{n!\, b_n}{x(x+1)\cdots(x+n)} \cdot \Omega(x)$$

untersuchen wollen.

Wir schreiben zu diesem Zwecke die Formel (1) folgendermaßen:

$$(6) \qquad \Omega(x) = \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{t^{n+1}} \cdot t^{x+n} dt;$$

dann läßt sich die Funktion:

$$\Phi(t) = \varphi(t) \cdot t^{-n-1}$$

mittels der allgemeinen Formeln des § 98 behandeln.

Ist nämlich λ die erste kritische Zahl von $\varphi(t)$, so hat die entsprechende Zahl Λ für $\Phi(t)$ im allgemeinen offenbar den Wert:

$$\Lambda = \lambda + n + 1; \tag{7}$$

ist speziell $t = 0$ für $\varphi(t)$ eine reguläre Stelle, so wird:

$$\Lambda = n + 1. \tag{8}$$

Was die zweite kritische Zahl Λ' von $\Phi(x)$ betrifft, so ist für $\lambda' > -1$, wenn λ' die zweite kritische Zahl von $\varphi(t)$ bezeichnet:

$$\Lambda' = \lambda' + n + 1 \tag{9}$$

zu setzen; die Annahme $\lambda' \leqq -1$ ergibt in ähnlicher Weise:

$$\Lambda' \geqq n, \quad \Lambda' \geqq \lambda'. \tag{10}$$

Bedenkt man nun, daß im Integrale (6) $x + n + 1$ statt x vorkommt, so leuchtet ein, daß die Fakultätenreihe:

$$\Omega(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!\,A_{n,s}}{(x+n+1)(x+n+2)\cdots(x+n+s+1)}, \tag{11}$$

wo der Kürze halber:

$$A_{n,s} = \sum_{r=0}^{r=s} \binom{n+r}{r} a_{s-r} \tag{12}$$

gesetzt worden ist, sicher konvergiert, falls sowohl $\Re(x) \gtrless {\lambda \atop \lambda'}$ als $\Re(x) > 0$ angenommen wird; dies muß daher auch mit der anderen Reihe:

$$\frac{n!\,b_n}{x(x+1)\cdots(x+n)} \cdot \Omega(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{n!\,s!\,b_n A_{n,s}}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n+s+1)} \tag{13}$$

der Fall sein.

Da nun:

$$\frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \int_0^1 (1-t)^n t^{x-1}\,dt, \qquad \Re(x) > 0$$

ist, so hat man wegen (3) und (4) für die Reihe (13) den Integralausdruck:

$$\frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \cdot \Omega(x) = \int_0^1 \Phi_n(t)\, t^{x-1}\,dt, \tag{14}$$

wo der Kürze halber:

$$\Phi_n(t) = \int_t^1 \left(1 - \frac{t}{z}\right)^n \frac{\varphi(z)\,dz}{z} \tag{15}$$

gesetzt worden ist.

Wir kehren jetzt zu Formel (13) zurück und bezeichnen mit l die größte der beiden Zahlen λ und λ'; dann folgt aus (9) und (10) unter Anwendung des Satzes § 96, III, daß die Fakultätenreihe rechter Hand in (13) sicher für $\Re(x) > l + 1$ *unbedingt* konvergiert, wenn außerdem $\Re(x) > l'$ angenommen wird, wo $\Re(x) > l'$ die Konvergenzgrenze von $\Omega_1(x)$ bestimmt.

Betrachten wir weiter die Reihe:

$$(16) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{n!s!b_n A_{n,s}}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n+s+1)},$$

wo s als eine feste positive ganze Zahl anzusehen ist, so ist klar, daß diese Reihe unter denselben Voraussetzungen wie (13) *unbedingt* konvergieren muß.

Nach diesen Erörterungen setzen wir nunmehr in (13) nacheinander:

$$n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

und addieren alle so erhaltenen Gleichungen, dann gelangt man offenbar zu einer Doppelreihe, deren Glieder wegen ihrer besonderen Form willkürlich angeordnet werden dürfen. Somit ergibt sich die Formel:

$$(17) \qquad \Omega(x) \cdot \Omega_1(x) = \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{B_r}{x(x+1)\cdots(x+r+1)},$$

wo der Kürze halber:

$$(18) \qquad B_r = \sum_{s=0}^{s=r} (r-s)!s!b_{r-s} \cdot A_{r-s,s}$$

gesetzt worden ist.

Die Formel (17) ist also sicher für $\Re(x) > 0$, $\Re(x) > l + 1$, $\Re(x) > l'$ anwendbar; geht man aber umgekehrt von der Reihe $\Omega_1(x)$ aus, so ergibt dieselbe Methode, daß die Formel (17) auch für $\Re(x) > 0$, $\Re(x) > l$, $\Re(x) > l' + 1$ anwendbar sein muß. Damit ist folgender Satz bewiesen:

Das Produkt zweier Fakultätenreihen $\Omega(x)$ und $\Omega_1(x)$, die für $\Re(x) > l$ bzw. $\Re(x) > l'$ konvergieren, kann mittels der Formeln (12), (17) *und* (18) *wieder in eine Fakultätenreihe entwickelt werden, die sicher für $\Re(x) > 0$, $\Re(x) > l$, $\Re(x) > l'$ konvergiert.*

§ 100. Anwendungen. Das Produkt $\frac{1}{x} \cdot \Omega(x)$.

Für ein erstes Beispiel zu der in § 99 entwickelten allgemeinen Theorie machen wir die Annahme:

$$\Omega(x) = \Omega_1(x) = \beta(x).$$

Wir finden dann mittels § 99, (3), (4):

$$(1) \qquad (\beta(x))^2 = \int_0^1 \frac{2 \log(1+t) - 2 \log 2 - \log t}{1-t} \cdot t^{x-1} dt, \quad \Re(x) > -1;$$

daraus folgt ohne weiteres die Fakultätenreihe:

$$(2) \qquad (\beta(x))^2 = \sum_{s=r}^{s=\infty} \frac{s!}{x(x+1)\cdots(x+1)} \cdot \frac{2^s - 1}{2^s(s+1)}, \qquad \Re(x) > 0,$$

die nur unbedingt konvergieren kann.

Für ein zweites Beispiel gelte die Annahme:

$$\Omega(x) = \beta(x), \qquad \Omega_1(x) = a(x),$$

wo $a(x)$ die in § 96, (8) definierte Funktion bedeutet. Es ergibt sich dann ohne weiteres die Integraldarstellung:

$$(3) \quad \beta(x) \cdot a(x) = \int_0^1 \frac{\log(2-t) + \log(1+t) - \log 2 - \log t}{2+t} \cdot t^{x-1} dt, \quad \Re(x) > -1$$

und die Fakultätenreihenentwicklung:

$$(4) \qquad \beta(x) \cdot a(x) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{s!\, b_s}{x(x+1)\cdots(x+s)}, \qquad \Re(x) > 0,$$

in der:

$$(5) \qquad b_n = \sum_{s=1}^{s=n} \frac{1}{s \cdot 3^{n-s+1}} \left(1 - (-1)^s - \frac{1}{2^s}\right)$$

zu setzen ist; aus (5) folgt aber:

$$|b_n| < 4 \cdot \sum_{s=1}^{s=n} \frac{1}{s \cdot 3^{n-s+1}}$$

und daraus, indem man $n_1 = \frac{n}{2}$ oder $n_1 = \frac{n-1}{2}$ setzt, je nachdem n gerade oder ungerade ist:

$$|b_n| < 4 \cdot \sum_{s=0}^{s=n_1} \frac{1}{3^{n-s+1}} + \frac{4}{n_1} \cdot \sum_{s=n_1+1}^{s=n} \frac{1}{3^{n-s+1}}.$$

Weiter ergibt sich:

$$|b_n| < \frac{2}{3^{n-n_1}} + \frac{2}{n_1},$$

d. h. die Reihe (4) konvergiert immer *unbedingt*, obgleich die für $a(x)$ erhaltene Fakultätenreihe in dem Parallelstreifen $0 < \Re(x) < 1$ nur *bedingt* konvergiert.

Für ein drittes Beispiel benutzen wir die Annahme:

$$\Omega(x) = \Omega_1(x) = a(x).$$

Wir erhalten zunächst:

$$(a(x))^2 = \int_0^1 \frac{\log(2-t) - \log t}{4-t} \cdot t^{x-1} dt, \qquad \Re(x) > -1, \tag{6}$$

daraus aber die Fakultätenreihe:

$$(a(x))^2 = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{s!\,c_s}{x(x+1)\cdots(x+s)}, \qquad \Re(x) > 0 \tag{7}$$

mit den allgemeinen Koeffizienten:

$$c_n = \sum_{s=1}^{s=n} \frac{(-1)^s - 1}{s \cdot 3^{n-s+1}}. \tag{8}$$

Dieselbe Methode wie vorher zeigt, daß die Fakultätenreihe (7) immer *unbedingt* konvergieren muß, obgleich die beiden Faktoren in dem Parallelstreifen $0 < \Re(x) < 1$ nur *bedingt* konvergieren.

Eine noch wichtigere Anwendung gewinnt man, wenn:

$$\Omega_1(x) = \frac{1}{x}$$

genommen wird. Wir erhalten so folgenden Satz, den schon Stirling[1]) *formell* gekannt hat:

Für die für $\Re(x) > \lambda$ konvergente Fakultätenreihe:

$$\Omega(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!\,a_s}{x(x+1)\cdots(x+s)} \tag{9}$$

besteht folgende andere Entwicklung:

$$\Omega(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!\,(a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_s)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+s)}, \tag{10}$$

1) Methodus differentialis, p. 9; London 1730.

die sicher konvergiert, wenn sowohl $\Re(x) > \varLambda$ als $\Re(x) > 0$ angenommen wird.

Man findet z. B.:

$$\beta(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+s+1)} \cdot \frac{2^{s+1}-1}{2^{s+1}}, \quad \Re(x) > 0 \tag{11}$$

$$a(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(2s)!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+2s+1)}, \quad \Re(x) > 0; \tag{12}$$

diese beiden Reihen konvergieren ebenfalls immer *unbedingt.*

Aus den speziellen Formeln (4), (7) und (12) erhellt deutlich folgende eigentümliche Eigenschaft der Fakultätenreihe für das Produkt $\Omega(x) \cdot \Omega_1(x)$:

Die für das Produkt zweier Fakultätenreihen $\Omega(x)$ und $\Omega_1(x)$ erhaltene neue Fakultätenreihe kann in einem Parallelstreifen unbedingt konvergieren, in welchem keiner oder nur einer der Faktoren $\Omega(x)$ und $\Omega_1(x)$ diese Eigenschaft besitzt.

Aus der Fakultätenreihe § 96, (9) ergibt sich ohne weiteres folgende andere:

$$a(x-1) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s s!}{(x-1)x(x+1)\cdots(x+s-1)}, \quad \Re(x) > 1$$

oder, was offenbar dasselbe ist:

$$1-(x-1)a(x=1) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s (s+1)!}{x(x+1)\cdots(x+s)}, \quad \Re(x) > 1. \tag{13}$$

Daraus folgt unter Anwendung von (10):

$$1-(x-1)a(x-1) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{s!\big(1-2+3-4+\cdots+(-1)^s(s+1)\big)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+s+1)}. \tag{14}$$

Diese Entwicklung konvergiert offenbar für $\Re(x) > 0$; somit haben wir eine neue eigentümliche Eigenschaft der Fakultätenreihen nachgewiesen, die sich folgendermaßen aussprechen läßt:

Der Konvergenzbereich für das Produkt $\Omega(x) \cdot \Omega_1(x)$ kann einen Parallelstreifen enthalten, in welchem jedenfalls eine der ursprünglichen Fakultätenreihen sicher divergiert.

§ 101. Differentiation und Integration einer Fakultätenreihe.

Da die Fakultätenreihe:

$$\Omega(x) = \int_0^1 \varphi(t) t^{x-1} dt = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!\, a_s}{x(x+1)\cdots(x+s)} \tag{1}$$

in ihrem ganzen Konvergenzbereiche *gleichmäßig* konvergiert, so darf man sie sowohl gliedweise differentiieren als auch gliedweise integrieren. Wir wollen nunmehr die beiden Funktionen:

$$\Omega^{(1)}(x), \quad \int \Omega(x) dx$$

gleichfalls in Fakultätenreihen entwickeln.

Für die Ableitung $\Omega^{(1)}(x)$ gilt zunächst wegen § 47, (2):

$$\Omega^{(1)}(x) = \int_0^1 \varphi(t) \log t \cdot t^{x-1} dt. \tag{2}$$

Setzt man daher:

$$\Phi(t) = \varphi(t) \cdot \log t,$$

und bezeichnet man mit Λ und Λ' die kritischen Zahlen von $\Phi(t)$, während die entsprechenden Zahlen von $\Phi(x)$ λ und λ' heißen mögen, so kann man offenbar direkt die Resultate des § 99 anwenden; denn die Funktion $\log t$ hat die kritischen Zahlen 0 und -1. Man findet also:

$$\Lambda = \lambda, \quad \Lambda = 0, \tag{3}$$

je nachdem $t = 0$ für $\varphi(t)$ eine singuläre oder eine reguläre Stelle ist.

Weiter hat man für $\lambda' > -1$:

$$\Lambda' \geqq 0, \quad \Lambda' \geqq \lambda' \tag{4}$$

und für $\lambda' \leqq -1$:

$$\Lambda' \geqq -1, \quad \Lambda' \geqq \lambda'. \tag{5}$$

Unter Anwendung der Formel § 98, (5) findet man demnach den Satz:

Die Ableitung einer Fakultätenreihe $\Omega(x)$ läßt sich in eine Fakultätenreihe:

$$\Omega^{(1)}(x) = -\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{s!\left(\frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s-1} + \cdots + \frac{a_{s-1}}{1}\right)}{x(x+1)\cdots(x+s)} \tag{6}$$

entwickeln, die sicher konvergiert, falls gleichzeitig $\Re(x) > \lambda$, $\Re(x) > \lambda'$, $\Re(x) > 0$ angenommen wird.

Da $\varphi(1)$ in dem Integrale (1) einen endlichen und nicht oszillierenden Wert hat, so darf man die Formel § 47, (9) anwenden und erhält so folgende andere Integraldarstellung:

$$\int \Omega(x)dx - a_0 \log x + K = \int_0^1 \chi(t) t^{x-1} dt, \tag{7}$$

wo K eine willkürliche Konstante bedeutet, während:

$$\chi(t) = \frac{\varphi(t) - \varphi(1)}{\log t} = \frac{\varphi(t) - \varphi(1)}{1-t} \cdot \frac{1-t}{\log t} \tag{8}$$

gesetzt worden ist.

Nun hat man aber wegen (1):

$$\frac{\varphi(1-t) - \varphi(1)}{t} = a_1 + a_2 t + a_3 t^2 + a_4 t^3 + \cdots, \tag{9}$$

während § 28, (14) die weitere Entwicklung:

$$\frac{t}{\log(1-t)} = -1 + \psi_0(-1)t + \psi_1(0)t^2 + \psi_2(1)t^3 + \cdots \tag{10}$$

liefert, wo $\psi_s(x)$ das Stirlingsche Polynom bedeutet.

Nach diesen Erörterungen hat die Funktion (9) offenbar die beiden kritischen Zahlen λ und $\lambda' - 1$, während die entsprechenden Zahlen für die Funktion (10) offenbar beide gleich Null sein müssen. Man hat daher mittels der Resultate des § 98 für $\chi(t)$ die beiden kritischen Zahlen:

$$l = \lambda, \quad l = 0, \tag{11}$$

je nachdem $t = 0$ für $\varphi(t)$ eine singuläre oder eine reguläre Stelle ist, und:

$$l' = \lambda', \quad l' = 0, \tag{12}$$

je nachdem $\lambda' \leqq 0$ ist.

Eine direkte Anwendung der Formel § 98, (5) ergibt daher den Satz:

Für das unbestimmte Integral der Fakultätenreihe $\Omega(x)$ hat man die Entwicklung:

$$a_0 \log x - \int \Omega(x) dx + K = \sum_{s=0}^{s=\infty}{}' \frac{s!\, A_s}{x(x+1)\cdots(x+s)}, \tag{13}$$

die sicher konvergiert, falls gleichzeitig $\Re(x) > \lambda$, $\Re(x) > \lambda'$, $\Re(x) > 0$ angenommen wird, und wo der Kürze halber:

$$A_n = -a_{n+1} + \sum_{s=0}^{s=n}{}' \psi_s(s-1) \cdot a_{n-s} \tag{14}$$

gesetzt worden ist.

§ 102. Differenz und endliches Integral einer Fakultätenreihe.

Schon in § 48 haben wir in den Formeln (1) und (8) Resultate angegeben, die unmittelbar auf die Fakultätenreihe:

$$\Omega(x)=\int_0^1 \varphi(t)t^{x-1}dt=\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{s!\,a_s}{x(x+1)\cdots(x+s)} \tag{1}$$

angewendet werden können. Wir finden sonach die Integraldarstellungen:

$$\varDelta\Omega(x)=-\int_0^1 \varphi(t)(1-t)t^{x-1}dt, \tag{2}$$

$$\varDelta^{-1}\Omega(x)=\int_0^1 \frac{\varphi(1)-\varphi(t)t^{x-1}}{1-t}\,dt+J(x), \tag{3}$$

wo $J(x)$ der Periodizitätsbedingung $J(x+1)=J(x)$ genügen muß, sonst aber ganz willkürlich angenommen werden darf.

Da nun die Fakultätenreihe $\Omega(x+1)$ sicher überall konvergiert, wo dies mit $\Omega(x)$ selbst der Fall ist, so ergibt sich unmittelbar:

$$\varDelta\Omega(x)=-\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(s+1)!\,a_s}{x(x+1)\cdots(x+s)}, \tag{4}$$

und die Fakultätenreihe ist sicher überall konvergent oder divergent, wo dies mit $\Omega(x)$ selbst der Fall ist.

Aus (4) folgt weiter:

$$\varDelta^{-1}\left(\Omega(x)-\frac{a_0}{x}\right)=-\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{s!\,a_{s+1}}{x(x+1)\cdots(x+s)}+J(x) \tag{5}$$

oder, was offenbar dasselbe ist:

$$\varDelta^{-1}\Omega(x)-a_0\Psi(x)=-\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{s!\,a_{s+1}}{x(x+1)\cdots(x+s)}+J(x). \tag{6}$$

Die so erhaltene Reihe ist gleichfalls überall konvergent oder divergent, wo dies mit $\Omega(x)$ selbst der Fall ist.

Die Formeln (4) und (6) zeigen deutlich, daß die Fakultätenreihen in der Differenzenrechnung für die Fundamentaloperationen genau dieselbe Rolle spielen wie die Reihen der negativen ganzen Potenzen für die Fundamentaloperationen der Analysis. Diese Ana-

logie tritt indessen noch deutlicher hervor, wenn man die Fakultätenreihe folgendermaßen schreibt:

$$(7)\qquad f(x)=\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{A_s}{x(x+1)\cdots(x+s)}.$$

Dann ergibt sich nämlich:

$$(8)\qquad \Delta f(x)=-\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(s+1)A_s}{x(x+1)\cdots(x+s+1)}$$

und:

$$(9)\qquad \Delta^{-1}f(x)-A_0\Psi(x)+J(x)=-\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{A_{s+1}}{(s+1)\cdot x(x+1)\cdots(x+s)},$$

während die Potenzreihe:

$$(10)\qquad g(x)=\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{A_s}{x^{s+1}}$$

in ähnlicher Weise die entsprechenden Formeln:

$$(11)\qquad g^{(1)}(x)=-\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(s+1)A_s}{x^{s+2}},$$

$$(12)\qquad \int g(x)dx-A_0\log x+K=-\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{A_s}{s\cdot x^s}$$

liefert.

Die Funktion $\Psi(x)=D_x\log\Gamma(x)$ spielt daher in der Differenzenrechnung eine ähnliche Rolle wie $\log x$ in der Analysis.

Aus § 48, (4) findet man endlich mittels (9) folgende andere Formel:

$$(13)\qquad \sum_{s=0}^{s=\infty}\left(f(x+s)-\frac{A_0}{x+s}\right)=\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{A_{s+1}}{(s+1)\cdot x(x+1)\cdots(x+s)},$$

die schon Stirling[1]) bekannt war.

§ 103. Über lineare Differenzengleichungen.

Als weitere Anwendung der allgemeinen Formeln, die wir in den vorhergehenden Paragraphen entwickelt haben, wollen wir nunmehr die lineare Differenzengleichung:

$$(1)\qquad \sum_{s=0}^{s=n}a_s(x)\cdot f(x+n-s)=g(x)$$

1) Methodus differentialis, p. 23; London 1730.

in Betracht ziehen, in der die Funktion $g(x)$ und die Koeffizienten $a_s(x)$ sämtlich Funktionen bedeuten, die in Fakultätenreihen entwickelt werden können. Wir suchen zunächst für die Gleichung (1) eine partikuläre Lösung, die ebenfalls in eine Fakultätenreihe entwickelt werden kann.

Zu diesem Zwecke setzen wir:

$$g(x) = \int_0^1 \varphi(t) t^{x-1} dt = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s! a_s}{x(x+1)\cdots(x+s)} \tag{2}$$

und:

$$a_s(x) = \int_0^1 \psi_s(t) t^{x-1} dt, \quad s = 0, 1, 2, 3, \cdots, n; \tag{3}$$

wir haben dann eine Funktion $\Phi(t)$ so zu bestimmen, daß das bestimmte Integral:

$$f(x) = \int_0^1 \Phi(t) t^{x-1} dt \tag{4}$$

eine Lösung von (1) darstellt.

Unter Anwendung der Formeln § 99, (3), (4) findet man:

$$a_s(x) \cdot f(x+n-s) = \int_0^1 \chi_s(t) t^{x-1} dt,$$

wo der Kürze halber:

$$\chi_s(t) = \int_t^1 \psi_s\left(\frac{t}{z}\right) \Phi(z) z^{n-s-1} dz$$

gesetzt worden ist; es kommt also darauf an, die noch unbekannte Funktion $\Phi(t)$ mittels (1) so zu bestimmen, daß identisch:

$$\int_t^1 \Psi(t, z) \Phi(z) dz = \varphi(t) \tag{5}$$

wird, wo:

$$\Psi(t, z) = \sum_{s=0}^{s=n} \psi_s\left(\frac{t}{z}\right) z^{n-s-1} \tag{6}$$

zu setzen ist.

Es leuchtet ein, daß die allgemeine Bestimmung von $\Phi(t)$ aus Gleichung (5) überaus große Schwierigkeiten darbietet, ja, man darf

wohl sagen, daß eine solche Bestimmung im allgemeinen nicht möglich ist. Für unsere Aufgabe kommt es aber noch besonders darauf an, daß die Funktion $\Phi(t)$, wenn sie bestimmt worden ist, den Bedingungen des § 95 Genüge leistet.

Die von uns gestellte Aufgabe ist daher, wenn sie überhaupt möglich ist, als eine sehr schwierige zu bezeichnen.

Wir wollen nunmehr den Spezialfall der Gleichung (1):

$$\sum_{s=0}^{s=n} a_s \cdot f(x+n-s) = g(x) \tag{7}$$

betrachten, wo die Koeffizienten a_s sämtlich konstant sind, während $g(x)$ durch die Formel (2) bestimmt ist. Wir finden in diesem Falle für die in (4) vorkommende Funktion den Ausdruck:

$$\Phi(t) = \frac{\varphi(t)}{F(t)}, \tag{8}$$

wo der Kürze halber:

$$F(t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + a_2 t^{n-2} + \cdots + a_{n-1} t + a_n \tag{9}$$

gesetzt worden ist.

Unsere Funktion $\Phi(t)$ läßt sich demnach als eine Summe von Gliedern von der Form:

$$\xi(t) = \frac{k\varphi(t)}{(t-\alpha)^r} \tag{10}$$

darstellen, wo k eine endliche Konstante bedeutet, während r eine positive ganze Zahl ist, die nicht größer als n sein kann. Aus (10) findet man aber wegen (2) unmittelbar:

$$(-1)^p \xi^{(p)}(1) = \frac{p!}{(1-\alpha)^r} \cdot \sum_{r=0}^{r=p} \binom{r+s-1}{s} \cdot \frac{a_{p-s}}{(1-\alpha)^s}. \tag{11}$$

Setzt man nun $|1-\alpha| \geqq 1$ voraus, so leuchtet ein, daß sich die Funktion $\xi(1-t)$ im Innern des Kreises $|t| = 1$ regulär verhält. Damit haben wir folgenden Satz bewiesen:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Gleichung (7) *eine Fakultätenreihe als Lösung besitzt, ist, daß die ganze rationale Funktion* (9) *keine Nullstelle im Innern des Kreises* $|1-t| = 1$ *besitzt.*

Aus (11) findet man folgenden weiteren Satz:

Wenn die ganze rationale Funktion $F(t)$ keine Nullstelle auf der Peripherie des Kreises $|1-t| = 1$ hat, so fällt der Konvergenz-

bereich der für $f(x)$ erhaltenen Fakultätenreihe mit demjenigen von $g(x)$ zusammen. Im anderen Falle muß man außerdem noch $\Re(x) > r - 1$ annehmen, wenn r die größte Ordnung der Nullstellen von $F(t)$ bezeichnet.

Die Koeffizienten der Fakultätenreihe für $f(x)$, welche sich mittels (11) und vermöge der analogen Formeln bestimmen lassen, werden allerdings sehr kompliziert.

Wir bemerken noch, daß das Integral:

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{F(t)} \cdot t^{x-1} dt, \tag{12}$$

falls es nur einen Sinn hat, immer eine Lösung von (7) darstellt, selbst wenn es nicht in eine Fakultätenreihe entwickelt werden kann.

Nach diesen allgemeinen Erörterungen betrachten wir jetzt die Gleichung erster Ordnung:

$$f(x+1) = \frac{1}{\omega} f(x) + g(x), \tag{13}$$

wo ω eine Konstante bedeutet. Wir finden für die Funktion $\Phi(t)$, welche in (4) eingeht, den Ausdruck:

$$\Phi(t) = \frac{\omega}{\omega t - 1} \cdot \varphi(t); \tag{14}$$

unter der Bedingung:

$$\left| \frac{\omega}{\omega - 1} \right| \leqq 1, \quad \Re(\omega) \leqq \frac{1}{2}$$

ergibt sich daher die Fakultätenreihe:

$$f(x) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{s!}{x(x+1)\cdots(x+s)} \left(\frac{\omega}{\omega - 1} b_s + \left(\frac{\omega}{\omega - 1}\right)^2 b_{s-1} + \cdots + \left(\frac{\omega}{\omega - 1}\right)^{s+1} b_0 \right) \tag{15}$$

und die Integraldarstellung:

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\omega}{\omega t - 1} \cdot \varphi(t) t^{x-1} dt; \tag{16}$$

dies Integral genügt aber immer der Gleichung (13), falls es überhaupt einen Sinn hat.

In dem speziellen Falle, wo $g(x) = \frac{1}{x}$ angenommen wird, findet man für die Gleichung:

$$f(x+1) = \frac{1}{\omega} \cdot f(x) + \frac{1}{x} \tag{17}$$

die partikuläre Lösung:

$$(18)\quad f(x) = \int_0^1 \frac{\omega}{\omega t - 1} \cdot t^{x-1} dt = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!}{x(x+1)\cdots(x+s)} \cdot \left(\frac{\omega}{\omega - 1}\right)^{s+1};$$

die Annahmen $\omega = -1$, $\omega = \frac{1}{2}$ führen also wegen § 96, (7), (9) auf $\beta(x)$ bzw. $\alpha(x)$ zurück.

Kapitel XIX.

Multiplikation des Argumentes in $\Omega(x)$.

§ 104. Transformation eines bestimmten Integrals.

Aus den Integraldarstellungen § 96, (1), (6) einer Fakultätenreihe:

$$(1)\qquad \Omega(x) = \int_0^1 \varphi(t) t^{x-1} dt = \int_0^\infty f(z) e^{-zx} dz$$

findet man, wenn α eine endliche von Null verschiedene Konstante bedeutet, daß:

$$(2)\qquad \Omega\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \int_0^1 \varphi(t) t^{\frac{x}{\alpha}-1} dt = \int_0^\infty f(z) e^{-\frac{zx}{\alpha}} dz$$

sein muß. Um nun für die Funktion (2) die Möglichkeit der Entwicklung in eine Fakultätenreihe in x zu untersuchen, müssen wir vor allem die Integrale in (2) auf die Form (1) bringen.

Zu diesem Zwecke setzen wir in dem letzten Integral (2) $z = \alpha u$ und finden so folgende Integraldarstellung:

$$(3)\qquad \Omega\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \alpha \cdot \int_0^{\infty \cdot \frac{1}{\alpha}} \varphi(e^{-\alpha u}) e^{-ux} du;$$

es ist nun in (2):

$$f(z) = \varphi(e^{-z})$$

zu setzen. Somit bleibt uns noch übrig, das Integral (3) weiter umzuformen.

Wir konstruieren deshalb um den Ursprung O als Mittelpunkt mit einem sehr großen Radius R einen Kreis, der die Achse der positiven Zahlen im Punkte A, den Radius aber, der durch den

Punkt $\frac{1}{\alpha}$ hindurchgeht, im Punkte B schneidet. Nehmen wir ferner an, daß die Funktion $\varphi(e^{-\alpha u})$ im Innern oder auf der Begrenzung des Kreissektors OAB keine singuläre Stelle hat, so ist nach dem Satze von Cauchy:

$$\int\limits_{AOB} \varphi(e^{-\alpha u}) e^{-ux} du = 0. \tag{4}$$

Setzt man daher:

$$\alpha = \varrho \cdot e^{i\omega},$$

so ergibt sich aus (4) die weitere Identität:

$$\int_0^R - \int_0^{R\cdot\frac{1}{\alpha}} = iR \cdot \int_0^{\omega} e^{-xRe^{-i\Theta}} \varphi\left(e^{-\alpha R e^{-i\Theta}}\right) e^{-i\Theta} d\Theta, \tag{5}$$

nachdem man in dem längs AB zu erstreckenden Kreisbogenintegrale:

$$u = Re^{-i\Theta}$$

eingeführt hat. Da nun offenbar:

$$\alpha R e^{-i\Theta} = \varrho R e^{i(\omega - \Theta)}$$

ist, so leuchtet ein, daß die reelle Komponente dieser komplexen Zahl positiv und sehr groß sein muß, falls nur $-\frac{\pi}{2} < \omega < +\frac{\pi}{2}$ angenommen wird.

Betreffs der Funktion $\varphi(t)$ setzen wir nunmehr voraus, daß es möglich sei, eine solche reelle Zahl λ zu bestimmen, daß:

$$\lim_{|t|=0} \left| t^x \varphi(t) \right| = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}, \quad \Re(t) > 0 \tag{6}$$

ist, je nachdem $\Re(x) \gtrless \lambda$ angenommen wird. Unter diesen Voraussetzungen kann man offenbar im ganzen Integrationsintervalle:

$$e^{-xRe^{-i\Theta}} \cdot \varphi\left(e^{-\alpha R e^{-i\Theta}}\right) = e^{-(x-\alpha\lambda)Re^{-i\Theta}}$$

setzen; somit verschwindet das Integral rechter Hand in (5), sobald R über jede Grenze hinauswächst, wenn man gleichzeitig:

$$\Re(\alpha) > 0, \quad \Re(x - \alpha\lambda) > 0 \tag{7}$$

voraussetzt. Es ergeben sich also aus (3) und (5) die beiden Integraldarstellungen:

$$\Omega\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \alpha \cdot \int_0^1 \varphi(t^{\alpha}) t^{x-1} dt = \alpha \cdot \int_0^{\infty} f(\alpha z) e^{-zx} dz. \tag{8}$$

Natürlich muß man ursprünglich über α und x so verfügen, daß die beiden Integrale in (2) einen Sinn haben; die gewöhnlichen Überlegungen zeigen dann, daß die Formeln (8) überall richtig bleiben, wo die darin vorkommenden Ausdrücke analytische Funktionen darstellen.

Unter den Voraussetzungen (6) und (7) ist es demnach gelungen, die Funktion $\Omega\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ auf die für eine Entwicklung in eine Fakultätenreihe mit dem Argumente x *notwendige* Integralform zu bringen; hieraus folgt aber noch gar nicht, daß eine solche Entwicklung wirklich auch möglich ist. Wie wir nun zu zeigen haben, ist dies im allgemeinen nicht der Fall.

§ 105. **Durchführung eines Spezialfalles.**

Nach den vorhergehenden allgemeinen Erörterungen wollen wir nunmehr den spezielleren Fall untersuchen, in welchem die Funktion $\varphi(t)$ entweder eine ganze transzendente Funktion in t bedeutet oder doch nur die einzige endliche singuläre Stelle $t = 0$ besitzt, und zwar so, daß im letzten Falle die Bedingung § 103, (6) befriedigt ist.

Ist $\varphi(t)$ eine in t ganze transzendente Funktion, so muß man offenbar in § 104, (2):

$$\Re\left(\frac{x}{\alpha}\right) > 0 \tag{1}$$

annehmen; die Formeln § 103, (8) bleiben dann richtig, falls überdies:

$$\Re(\alpha) > 0 \tag{2}$$

vorausgesetzt wird.

In diesem Falle hat nun die Funktion $\varphi(t^\alpha)$ in $t = 0$ eine singuläre Stelle; aus der Identität:

$$D_t \varphi(t^\alpha) = \alpha t^{\alpha-1} \cdot \varphi^{(1)}(t^\alpha)$$

kann nun unmittelbar gefolgert werden, daß die Bedingung § 103, (6) befriedigt wird, falls man $\Re(x) > \Re(-\alpha)$ voraussetzt. Substituiert man noch αx statt x, so ergibt sich der folgende Satz:

Falls $\varphi(t)$ eine in t ganze transzendente Funktion bedeutet, kann $\Omega(x)$ in eine Fakultätenreihe nach αx entwickelt werden, die sicher konvergiert, wenn gleichzeitig:

$$\Re(\alpha) > 0, \quad \Re(\alpha x + \alpha) > 0 \tag{3}$$

angenommen wird.

Als Beispiele kann man die beiden Funktionen $P(x)$ und $\mathfrak{P}(x)$ wählen.

Im zweiten Falle, wo $t = 0$ eine singuläre Stelle von $\varphi(t)$ ist, doch so, daß die Bedingung § 103, (6) befriedigt wird, hat offenbar die Funktion $\varphi(t^\alpha)$ füt $\Re(\alpha) > 0$ in $t = 0$ auch eine singuläre Stelle derselben Natur; nur muß man $\lambda \Re(\alpha)$ statt λ selbst einführen.

Setzt man wieder αx statt x, so erhält man folgenden anderen Satz:

Wenn $t = 0$ die einzige im Endlichen gelegene singuläre Stelle von $\varphi(t)$ ist, und zwar so, daß sie der Bedingung § 106, (3) *genügt, so läßt sich $\Omega(x)$ in eine Fakultätenreihe nach αx entwickeln, die sicher konvergiert, wenn gleichzeitig:*

$$\Re(\alpha) > 0, \quad \Re(\alpha x) > \lambda \Re(\alpha) \tag{4}$$

angenommen wird.

Als Beispiel nehmen wir $\varphi(t) = \frac{1}{t}\cdot$ Daraus folgt:

$$\Omega(x) = \frac{1}{x-1} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!}{x(x+1)\cdots(x+s)}, \qquad \Re(x) > 1;$$

unsere allgemeine Methode liefert dann die allgemeinere Formel:

$$\frac{1}{x-\alpha} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!}{x(x+1)\cdots(x+s)} \cdot \binom{\alpha+s-1}{s}, \quad \Re(x) > \Re(\alpha).$$

Was die Koeffizienten der neuen Fakultätenreihen betrifft, die wir hier untersucht haben, so kommt es darauf an, die nach t genommenen höheren Ableitungen von $\varphi(t^\alpha)$ zu berechnen. Für diese Ableitungen besitzen wir zwar allgemeingültige Formeln[1]), sie sind indessen sehr kompliziert. Wir bemerken daher, daß unsere Untersuchungen in § 110 für diese Koeffizienten weit einfachere Ausdrücke liefern.

§ 106. Der allgemeine Fall.

Wir wollen nunmehr den allgemeinen Fall untersuchen, in welchem die Funktion $\varphi(t)$ im Endlichen andere singuläre Stellen als $t = 0$ besitzt. Zu diesem Zwecke setzen wir:

$$\alpha = \varrho e^{i\omega}, \quad z = r e^{i v}, \quad z^{\frac{1}{\alpha}} = \sigma e^{i\tau}, \tag{1}$$

1) Schlömilch, Kompendium, Bd. II, p. 9; 1879.

wo sowohl $0 \leqq v < 2\pi$ als $0 \leqq \tau < 2\pi$ vorauszusetzen ist; dann ist offenbar:

$$e^{\log r + iv} = e^{(\log \sigma + i\tau)(\varrho \cos \omega + i \varrho \sin \omega)}. \tag{2}$$

Weiter beschreiben wir mit dem Radius 1 um die Mittelpunkte (0,0) bzw. (1,0) zwei Kreise C_0 und C_1; wenn nun die Funktion $\Omega\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ wirklich in eine Fakultätenreihe nach x entwickelt werden kann, so darf die Funktion $\varphi(z^\alpha)$ keine singuläre Stelle *im Innern des Kreises* C_1 besitzen, d. h. es muß für jede singuläre Stelle z dieser Funktion die Bedingung:

$$\sigma \geqq 2 \cos \tau \tag{3}$$

befriedigt sein; daraus folgt wegen (2):

$$e^{\frac{\log r \cdot \cos \omega + (v + 2p\pi) \sin \omega}{\varrho}} \geqq 2 \cos\left(\frac{(v + 2p\pi) \cos \omega - \log r \cdot \sin \omega}{\varrho}\right), \tag{4}$$

wo p eine willkürliche positive Zahl bedeutet.

Es sei nun α eine *komplexe* Zahl, so daß $\sin \omega$ von Null verschieden ist; alsdann ist es möglich, über die ganze Zahl p so zu verfügen, daß der Ausdruck linker Hand in (4) beliebig klein wird, während der Ausdruck rechter Hand größer als 1 ist, so daß die Bedingung (4) nicht erfüllt ist. Damit haben wir den Satz bewiesen:

Falls $\varphi(t)$ außer $t = 0$ singuläre Stellen im Endlichen besitzt, so kann die Konstante α jedenfalls nur reelle Werte annehmen.

Wir setzen demnach in (4) $\sin \omega = 0$, d. h. $\omega = 2q\pi$, weil ja immer $\Re(\alpha) > 0$ angenommen werden muß; somit ergibt sich die einfachere Bedingung:

$$r^{\frac{1}{\alpha}} \geqq 2 \cos\left(\frac{v + 2p\pi}{\alpha}\right), \tag{5}$$

der also für jeden anderen singulären Punkt von $\varphi(t)$ außer $t = 0$ genügt werden muß Daraus fließt der Satz:

Wenn die absoluten Beträge der singulären Stellen von $\varphi(t)$ außer $t = 0$ nicht sämtlich größer als 1 sind, darf α nur rationale Werte annehmen.

Ist nämlich $r \leqq 1$ und α irrational, so bleibt die Größe linker Hand in (5) stets kleiner als 1, während man über p so verfügen kann, daß der Ausdruck rechter Hand größer als 1 wird; dies ist aber unmöglich.

§ 107. Über die rationalen Werte des Multiplikators.

Wir betrachten jetzt den Fall, in welchem α nur *rational* sein darf, und wollen den interessanten Satz beweisen:

Darf α nur rational sein, so kann sein Zähler nur die Werte 1, 2 *oder* 3 *annehmen.*

Nimmt man in diesem Falle von dem Winkel rechter Hand in § 106, (5) die eventuellen Multipla von 2π weg, so darf der so reduzierte Winkel *nicht* zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{3}$ und $+\frac{\pi}{3}$ liegen. Ist nämlich:

$$\alpha = \frac{a}{b}, \quad \frac{bv}{a} = v' + 2q\pi, \quad \pi \geqq v' \geqq \frac{\pi}{3}, \tag{1}$$

wo $\frac{a}{b}$ ein irreduzibler Bruch ist, während q eine ganze Zahl bedeutet, und setzt man:

$$\frac{2bp\pi}{a} = -\frac{2r\pi}{a} + 2s\pi,$$

so folgt daraus:

$$bp - as = -r, \tag{2}$$

wo r und s ganze Zahlen bedeuten.

Die *Diophantische* Gleichung (2) gestattet immer, welchen ganzen Wert man auch r zuerteilen mag, ganze Lösungen in p und s, weil a und b zueinander prim sind.

Es sei demnach $a \geqq 4$, dann ist es möglich, eine positive ganze Zahl m so zu bestimmen, daß:

$$\frac{m+1}{a}\pi > v' \geqq \frac{m\pi}{a} \tag{3}$$

wird; weiter behaupte ich, daß es außerdem möglich ist, eine ganze Zahl r so zu bestimmen, daß gleichzeitig:

$$\frac{m\pi}{a} - \frac{2r\pi}{a} > -\frac{\pi}{3}, \quad \frac{(m+1)\pi}{a} - \frac{2r\pi}{a} < \frac{\pi}{3} \tag{4}$$

wird; die Ungleichungen (4) sind nämlich richtig, falls nur r so bestimmt wird, daß:

$$3m + a > 6r > 3m - a + 3 \tag{5}$$

ist, und die neuen Ungleichungen (5) sind, wie man leicht einsieht, für $a \geqq 4$ immer möglich.

Nachdem r aus (5) bestimmt worden, kann p aus (2) gefunden werden, und der Winkel:

$$v' - \frac{2r\pi}{a}$$

genügt den beiden Ungleichungen (4).

Setzt man endlich in (1) $-\pi < v' \leqq -\frac{\pi}{3}$ voraus, so kann man in ähnlicher Weise verfahren, und damit ist unser Satz bewiesen.

§ 108. Anwendungen auf $\beta(x)$.

Die Funktion $\beta(x)$ gestattet eine schöne Anwendung der vorhergehenden Sätze. Aus der Integraldefinition:

$$\beta(x) = \int_0^1 \frac{z^{x-1}}{1+z} dz, \quad \Re(x) > 0 \tag{1}$$

folgt unmittelbar, daß $\varphi(z)$ in $z = -1$ eine singuläre Stelle hat, so daß der Multiplikator α nur *rationale* Werte annehmen darf.

Dem Satze des § 107 zufolge betrachten wir daher die beiden verschiedenen Fälle $\alpha = 2$, $\alpha = 3$.

1) $\alpha = 2$; man findet hier mittels § 104, (8):

$$\beta\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \cdot \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+x^2} dt, \quad \Re(x) > 0. \tag{2}$$

Da nun für die hier vorkommende Funktion:

$$\varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

bekanntlich:

$$(-1)^n \varphi^{(n)}(1) = \frac{n!}{2^{\frac{n+1}{2}}} \cdot \sin \frac{(n+1)\pi}{4}$$

ist, so ergibt sich aus (2), wenn man zuerst $2x$ statt x einführt, die Fakultätenreihenentwicklung:

$$\beta(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!}{2x(2x+1)\cdots(2x+s)} \cdot \frac{\sin \frac{(s+1)\pi}{4}}{2^{\frac{s-1}{2}}}, \tag{3}$$

die in der ganzen x-Ebene außer in den Polen anwendbar ist.

2) $\alpha = 3$; eine einfache Rechnung ergibt hier mittels § 104, (8):

$$\beta\left(\frac{x}{3}\right) = \beta(x) - \int_0^1 \frac{t-2}{t^2-t+1} \cdot t^{x-1} dt, \quad \Re(x) > 0. \tag{4}$$

Daraus erhält man durch ein ähnliches Verfahren wie vorher die Entwicklung:

$$\beta(x) = \beta(3x) + 2 \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s! \sin \frac{2s+1}{6}\pi}{3x(3x+1)\cdots(3x+s)}, \tag{5}$$

die für $\Re(x) > 0$ konvergiert.

Setzt man in (5) $\frac{x}{3}$ statt x, so konvergiert die Fakultätenreihe nur bedingt in dem Parallelstreifen $0 < \Re(x) < 1$. Eine Anwendung der allgemeinen Formel § 100, (10) ergibt folgende andere Entwicklung:

$$\beta\left(\frac{x}{3}\right) - \beta(x) = 4 \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s! \cdot \sin^2 \frac{s+1}{6}\pi}{(x+1)(x+2)\cdots(x+s+1)}, \quad \Re(x) > 0, \tag{6}$$

die nur *unbedingt* konvergieren kann

Kapitel XX.

Methoden von Stirling.

§ 109. Erste Methode von Stirling. Asymptotische Reihe für $\Omega(x)$.

Stirling[1]) hat eine Methode angegeben, durch welche die Fakultätenreihe:

$$\Omega(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{A_{s+1}}{x(x+1)\cdots(x+s)} \tag{1}$$

formell in eine Reihe von negativen ganzen Potenzen von x entwickelt werden kann. Um die Anwendbarkeit dieser *formalen* Methode von Stirling zu untersuchen, gehen wir von der elementaren Identität:

$$\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} - \frac{y}{x^2} + \frac{y^2}{x^3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1} y^{n-1}}{x^n} + \frac{(-1)^n y^n}{x^n} \cdot \frac{1}{x+y} \tag{2}$$

aus; die bekannte Dekompositionsformel:

$$\frac{r!}{x(x+1)\cdots(x+r)} = \sum_{s=0}^{s=r} (-1)^s \binom{r}{s} \cdot \frac{1}{x+r} \tag{3}$$

ergibt dann wegen (2), wenn man in dieser Formel der Reihe nach:

$$y = 0, 1, 2, 3, \cdots, r$$

1) Methodus differentialis, p. 13; London 1730.

setzt und dann die so erhaltenen Ausdrücke in (3) einführt, die weitere Identität:

$$(4)\qquad \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+r)} = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s \mathfrak{C}_{r+1}^s}{x^{r+s+1}} + A_{n,r}(x),$$

wo die Koeffizienten $\mathfrak{C}_{r+1}^s$ die in § 26, (10), (11) eingeführten Stirlingschen Zahlen zweiter Art bedeuten, während der Kürze halber:

$$(5)\qquad A_{n,r}(x) = \frac{(-1)^n}{x^n \cdot r!} \cdot \sum_{s=0}^{s=r-1} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} \cdot \frac{(r-s)^n}{x+r-s}$$

gesetzt worden ist.

Setzt man nun aber in (1):

$$(6)\qquad \Omega(x) = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{A_{s+1}}{x(x+1)\cdots(x+s)} + B_n(x),$$

so ist offenbar:

$$(7)\quad B_n(x) = \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)} \cdot \left(A_{n+1} + \sum_{s=2}^{s=\infty} \frac{A_{n+s}}{(x+n+1)\cdots(x+n+s-1)} \right);$$

transformiert man demnach mittels (4) jedes Glied der Summe rechter Hand in (6), so ergibt sich folgende Formel:

$$(8)\qquad \Omega(x) = \sum_{s=1}^{s=n} \frac{\mathfrak{A}_s}{x^s} + R_n(x),$$

wo der Kürze halber:

$$(9)\qquad \begin{cases} \mathfrak{A}_1 = A_1 \\ \mathfrak{A}_r = \sum_{s=0}^{s=r-2} (-1)^s \mathfrak{C}_{r-s}^s \cdot A_{r-s} \end{cases}$$

gesetzt worden ist, während man für das Restglied folgenden Ausdruck:

$$(10)\quad R_n(x) = B_n(x) + A_2 \cdot A_{n,1}(x) + A_3 \cdot A_{n,2}(x) + \cdots + A_n \cdot A_{n,n-1}(x)$$

findet.

Wenn nun in (8) $R_n(x)$ der Grenze Null zustrebt, falls man n über jede Grenze hinauswachsen läßt, so gelangt man zu der von Stirling angegebenen Reihe:

$$(11)\qquad \Omega(x) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\mathfrak{A}_s}{x^s},$$

die somit für jeden Wert von x anwendbar ist, für den $R_n(x)$ die obengenannte Eigenschaft besitzt.

Wenn aber die Reihe rechter Hand in (11) für jeden endlichen Wert von x *divergiert,* so hat sie dennoch eine andere interessante Eigenschaft.

Bedeutet n eine bestimmte endliche positive ganze Zahl, so ist es wegen (5) möglich, eine so große positive Zahl P anzugeben, daß für $|x| \leqq \varrho$:

$$|x^n \cdot A_{n,r}(x)| < \frac{\varepsilon}{n+1}, \quad r = 2, 3, 4, \cdots, n \tag{12}$$

wird, wo ε eine vorgegebene positive Größe von beliebiger Kleinheit bedeutet.

Was das Restglied $B_n(x)$ betrifft, so konvergiert offenbar die eingeklammerte Summe rechter Hand in (7) für jeden Wert von x, der im Konvergenzbereiche der Fakultätenreihe $\Omega(x)$ gelegen ist, außer für die negativen ganzen Werte, die kleiner als $-n$ sind.

Mit dieser Einschränkung über die Lage des sehr entfernten Punktes x ist es demnach möglich, die vorher genannte Zahl ϱ so zu bestimmen, daß zugleich:

$$|x^n \cdot B_n(x)| < \frac{\varepsilon}{n+1} \tag{13}$$

wird; daher wird unter diesen Voraussetzungen wegen (10):

$$|x \quad \cdot R_n(x)| < \varepsilon; \tag{14}$$

also ist nach der Definition von Poincaré[1]):

$$\Omega(x) \sim \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\mathfrak{A}_s}{x^s}, \tag{15}$$

wo das Zeichen $\sim$ eine asymptotische Gleichheit bedeutet. Wir haben damit folgenden Satz bewiesen:

Falls die Stirlingsche Transformation der Fakultätenreihe $\Omega(x)$ *auf eine divergente Reihe führt, liefert sie die asymptotische Reihe* (15), *die in jedem sehr entfernten Punkte des Konvergenzbereiches von* $\Omega(x)$ *mit Ausnahme der Achse der negativen reellen Zahlen anwendbar ist.*

Wir wollen die Tragweite dieses Satzes noch im einzelnen untersuchen und setzen zu diesem Zwecke:

$$x = |x| \cdot e^{i\theta}.$$

Es sind dann folgende drei Fälle möglich:

1) $\Omega(x)$ ist in der ganzen x-Ebene konvergent; dann gilt die asymptotische Reihe (15), falls $-\pi < \theta < +\pi$ angenommen wird

---

1) Acta Mathematica Bd. 8, p. 297; 1886.

2) Der Konvergenzbereich von $\Omega(x)$ enthält die Achse der imaginären Zahlen; dann muß man $-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq +\frac{\pi}{2}$ annehmen.

3) $\Omega(x)$ ist für $\Re(x)=0$ divergent; es muß dann $-\frac{\pi}{2}<\theta<+\frac{\pi}{2}$ sein.

Wir kehren nun zu den Integraldarstellungen § 96, (1), (6):

$$\Omega(x)=\int_0^1 \varphi(t)t^{x-1}dt=\int_0^\infty f(z)e^{-zx}dz \tag{16}$$

zurück, in denen:

$$(-1)^n\varphi^{(n)}(1)=A_{n+1} \tag{17}$$

und:

$$f(z)=\varphi(e^{-z}),\quad \varphi(t)=f(-\log t)$$

gesetzt werden möge; aus dieser Definition von $f(z)$ geht deutlich hervor, daß diese Funktion im Bereiche der Stelle $z=0$ analytisch ist. Eine Verbindung der Formeln (9) und § 27, (3), (4) liefert dann unmittelbar die Entwicklung:

$$f(z)=\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{\mathfrak{A}_{s+1}}{s!}\cdot z^s \tag{18}$$

und die Taylorsche Reihe:

$$f(z)=\sum_{s=0}^{s=n-1}\frac{\mathfrak{A}_{s+1}}{s!}\cdot z^s+B_n(z). \tag{19}$$

Daraus fließt der Satz:

Führt man in das letzte Integral (16) *die Entwicklung* (18) *ein so ergibt die gliedweise Integration die Stirlingsche Reihe* (11), *falls sie konvergiert; sonst gibt* (19) *die asymptotische Reihe* (15) *mit dem Restgliede:*

$$R_n(x)=\int_0^\infty B_n(z)e^{-zx}dz, \tag{20}$$

das jedoch im allgemeinen nur einen Sinn hat, wenn dies mit dem Integral (16) *der Fall ist.*

Wir bemerken endlich, daß man aus (8) für das Restglied $R_n(x)$ folgenden Ausdruck findet:

$$R_n(x)=\frac{K}{x^{n+1}}, \tag{21}$$

wo K einem endlichen Grenzwerte zustrebt, wenn $|x|$ über jede Grenze hinauswächst. Aus (21) findet man aber unmittelbar den neuen Satz:

Die asymptotische Reihe (15) *darf differentiiert und integriert werden, ohne ihre asymptotische Eigenschaft zu verlieren; die beiden so erhaltenen asymptotischen Reihen:*

$$(22) \qquad \Omega^{(1)}(x) \sim -\sum_{s=1}^{s=n-1} \frac{s\mathfrak{A}_s}{x^{s+1}},$$

$$(23) \qquad \int \Omega(x)\,dx - \mathfrak{A}_0 \log x + K \sim -\sum_{s=1}^{s=n} \frac{\mathfrak{A}_{s+1}}{s \cdot x^s}$$

sind anwendbar, wenn dies mit (15) *selbst der Fall ist, obgleich die für die beiden Funktionen* (22), (23) *erhaltenen Fakultätenreihen im allgemeinen nicht denselben Konvergenzbereich wie* $\Omega(x)$ *selbst haben.*

§ 110. Zweite Methode von Stirling.

Umgekehrt hat Stirling[1]) auch eine Methode angegeben, mittels der man die Reihe der negativen ganzen Potenzen:

$$(1) \qquad \Omega(x) = \frac{\mathfrak{A}_1}{x} + \frac{\mathfrak{A}_2}{x^2} + \frac{\mathfrak{A}_3}{x^3} + \cdots$$

formell in eine Fakultätenreihe verwandeln kann. Um die Anwendbarkeit dieser *formalen* Methode zu beurteilen, gehen wir von der Stirlingschen Formel § 30, (4) oder § 96, (13):

$$(2) \qquad \frac{1}{x^n} = \sum_{s=n-1}^{s=\infty} \frac{C_s^{s-n+1}}{x(x+1)\cdots(x+s)}, \quad \Re(x) > 0$$

aus, nach welcher die einzelnen Glieder der Reihe (1) in eine Fakultätenreihe entwickelt werden können. Wir erhalten so rein *formell* folgende Entwicklung:

$$(3) \qquad \Omega(x) = \frac{\mathfrak{A}_1}{x} + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{C_s^0 \mathfrak{A}_{s+1} + C_s^1 \mathfrak{A}_s + \cdots + C_s^{s-1} \mathfrak{A}_2}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+s)}.$$

Es sei nun:

$$(4) \qquad f(z) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\mathfrak{A}_{s+1}}{s!} \cdot z^s$$

und:

$$(5) \qquad \varphi(1-t) = \mathfrak{A}_1 + \sum_{s=1}^{s=\infty} (C_s^0 \mathfrak{A}_{s+1} + C_s^1 \mathfrak{A}_s + \cdots + C_s^{s-1} \mathfrak{A}_2) t^s;$$

dann ergibt sich wegen § 27, (3), (4) die Identität:

$$\varphi(e^{-z}) = f(z), \quad \varphi(t) = f(-\log t).$$

1) Methodus differentialis, p. 11—12; London 1730.

Damit haben wir wegen (3) den Satz bewiesen:

Es sei von einer Funktion $\Omega(x)$ bekannt, daß sie in eine Fakultätenreihe entwickelt werden kann; stellt man diese Funktion durch die Reihe (1) *dar, die entweder konvergent oder asymptotisch ist, so ergibt die formale Methode von Stirling immer die Fakultätenreihe für $\Omega(x)$, gleichviel ob* (1) *konvergiert oder divergiert.*

Wenn die Reihe (1) für $|x| > \varrho$ konvergiert, so läßt sich, wie Jensen[1]) gezeigt hat, ohne Mühe in aller Strenge beweisen, daß die Methode von Stirling eine Fakultätenreihe liefert, die sicher für $\Re(x) > \varrho$ konvergiert.

Allein diese Methode ist unmöglich als *independente* Methode, denn erstens ist die Konvergenz der Reihe (1) eine für die Fakultätenreihe ganz fremde Bedingung, und zweitens liefert diese Methode kein Mittel zur Bestimmung des wirklichen Konvergenzbereiches der so erhaltenen Fakultätenreihe.

Andrerseits kann diese zweite Stirlingsche Methode als *formale* Methode sehr vorteilhaft sein, wenn man zuerst die Existenz der Fakultätenreihe nachgewiesen und ihren Konvergenzbereich bestimmt hat.

Wir erwähnen einige Beispiele dieser formalen Anwendung der obengenannten Methode:

1) Aus § 109, (22), (23) findet man vermöge (3) die Entwicklungen:

$$(6) \qquad \Omega^{(1)}(x) = -\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{C_s^0 \cdot s \cdot \mathfrak{A}_s^1 + C_s^1 \cdot (s-1) \cdot \mathfrak{A}_{s-1} + \cdots + C_s^{s-1} \cdot 1 \cdot \mathfrak{A}_1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+s)},$$

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \mathfrak{A}_1 \log x - \int \Omega(x)\,dx + K = \frac{\mathfrak{A}_2}{x} + \\ & \qquad + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{C_s^0 \cdot \frac{\mathfrak{A}_{s+2}}{s+1} + C_s^1 \cdot \frac{\mathfrak{A}_{s+1}}{s} + \cdots + C_s^{s-1} \cdot \frac{\mathfrak{A}_3}{2}}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+s)}, \end{aligned} \right.$$

die ja *formell* nicht komplizierter sind als die Reihe (3) selbst.

2) Dividiert man die Formel (1) durch x, so ergibt eine Anwendung von (3), nachdem man wieder mit x multipliziert hat, folgende Entwicklung:

$$(8) \qquad \Omega(x) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{C_s^0 \mathfrak{A}_s + C_s^1 \mathfrak{A}_{s-1} + \cdots + C_s^{s-1} \mathfrak{A}_1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+s)},$$

die auch formell (3) ganz ähnlich ist.

1) Nyt Tidsskrift for Mathematik, Bd. 2 B, p. 70 ff.; 1891.

3) Aus (1) findet man:

$$\Omega(x) = \frac{\mathfrak{A}_1 \alpha}{\alpha x} + \frac{\mathfrak{A}_2 \alpha^2}{\alpha^2 x^2} + \frac{\mathfrak{A}_3 \alpha^3}{\alpha^3 x^3} + \cdots. \tag{9}$$

Demnach ergibt unsere Methode folgende Fakultätenreihe:

$$\Omega(x) = \frac{\mathfrak{A}_1 \alpha}{\alpha x} + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{C_s^0 \mathfrak{A}_{s+1} \alpha^{s+1} + C_s^1 \mathfrak{A}_s \alpha^s + \cdots + C_s^{s-1} \mathfrak{A}_2 \alpha^2}{\alpha x(\alpha x + 1)(\alpha x + 2) \cdots (\alpha x + s)}, \tag{10}$$

die (3) formell ebenfalls ganz ähnlich ist.

Das letzte Beispiel zeigt die Unzulänglichkeit der Stirlingschen Methode als independenter Methode am deutlichsten; denn die *formale* Anwendung dieser Methode ergibt für jeden endlichen, von 0 verschiedenen Wert von α stets die Reihe (10), obgleich wir wissen, daß eine solche Reihe nur ausnahmsweise existiert.

§ 111. Asymptotische Entwicklung für $\Omega(x + y)$.

Wir kehren nun zur Integraldarstellung einer Fakultätenreihe:

$$\Omega(x) = \int_0^\infty f(z) e^{-zx} dz \tag{1}$$

zurück. Aus den beiden Entwicklungen:

$$f(z) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\mathfrak{A}_{s+1}}{s!} \cdot z^s, \qquad e^{-yz} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s y^s}{s!} \cdot z^s$$

folgt ohne weiteres folgende andere:

$$e^{-yz} \cdot f(z) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\mathfrak{A}_{s+1}(y)}{s!} \cdot z^s, \tag{2}$$

in welcher der Kürze halber:

$$\mathfrak{A}_{n+1}(y) = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{n}{s} \cdot \mathfrak{A}_{n-s+1} \cdot y^s \tag{3}$$

gesetzt worden ist.

Da nun wegen (1):

$$\Omega(x + y) = \int_0^\infty f(z) e^{-zy} \cdot e^{-zx} dz$$

ist, so ergibt die erste Stirlingsche Methode die Potenzreihe:

$$\Omega(x + y) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\mathfrak{A}_s(y)}{x^s}, \tag{4}$$

falls sie wirklich konvergiert, d. h. falls $\Omega(x)$ selbst in eine solche Reihe entwickelt werden kann.

Wenn dies nicht der Fall ist, gehen wir von der elementaren Identität:

$$\frac{1}{x+y} = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^s y^s}{x^{s+1}} + \frac{(-1)^n y^n}{x^n(x+y)}$$

aus und erhalten so nach r-maliger Differentiation nach y:

$$\frac{1}{(x+y)^{r+1}} = \sum_{s=0}^{s=n-r-1} (-1)^s \binom{r+s}{s} \cdot \frac{y^s}{x^{r+s+1}} + \frac{(-1)^{r+n}}{r!\,x^n} D_y^r \left(\frac{y^n}{x+y}\right).$$

Daraus gewinnt man ohne Mühe folgende andere Identität:

$$(5) \qquad \sum_{s=1}^{s=n} \frac{\mathfrak{A}_s}{(x+y)^s} = \sum_{s=1}^{s=n} \frac{\mathfrak{A}_s(y)}{x^s} + R_n(x,y),$$

wo der Kürze halber:

$$(6) \qquad R_n(x,y) = \frac{1}{x^n} \cdot \sum_{s=1}^{s=n} \frac{(-1)^{n+s-1} \mathfrak{A}_s}{(s-1)!} \cdot D_y^{s-1} \left(\frac{y^n}{x+y}\right)$$

gesetzt worden ist.

Wenn nun $|y|$ als endlich vorausgesetzt wird, so erhält man aus (5) und § 109, (15) vermöge (6) den Satz:

Es sei $|y|$ eine endliche Größe; dann gilt die asymptotische Entwicklung:

$$(7) \qquad \Omega(x+y) \sim \sum_{s=1}^{s=n} \frac{\mathfrak{A}_s(y)}{x^s},$$

wenn nur der sehr entfernte Punkt $(x+y)$ im Konvergenzbereiche der Fakultätenreihe Ω gelegen ist.

Eine Anwendung der Formel § 110, (3) liefert dann ohne weiteres die Fakultätenreihenentwicklung:

$$(8)\ \Omega(x+y) = \frac{\mathfrak{A}_1(y)}{x} + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{C_s^0 \mathfrak{A}_{s+1}(y) + C_s^1 \mathfrak{A}_s(y) + \cdots + C_s^{s-1} \mathfrak{A}_2(y)}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+s)}.$$

Wir bemerken noch, daß der eben bewiesene Satz häufig dazu dienen kann, den Bereich, in welchem die für $\Omega(x)$ erhaltene asymptotische Reihe § 109, (15) giltig bleibt, zu erweitern.

Wir gehen nämlich von der Differenzengleichung:

$$(9) \qquad \sum_{s=0}^{s=n} \alpha_s \cdot \Omega(x+n-s) = g(x)$$

aus, wo die Koeffizienten α_s sämtlich konstant sind, die gegebene Funktion $g(x)$ aber in die asymptotische Reihe:

$$g(x) \sim \sum_{s=1}^{s=p} \frac{\beta_s}{x^s} \tag{10}$$

entwickelt werden kann, und so daß (10) für jeden sehr entfernten Punkt der x-Ebene anwendbar ist.

Setzen wir nun voraus, daß die für $\Omega(x)$ erhaltene Fakultätenreihe für $\Re(x) > \Lambda$ konvergiert, so lassen sich die Funktionen:

$$\Omega(x+1),\ \Omega(x+2), \cdots, \Omega(x+n) \tag{11}$$

sämtlich in asymptotische Reihen entwickeln, die für:

$$x = |x|\, e^{i\theta}, \ -\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2}$$

giltig bleiben.

Es sei nun wie gewöhnlich:

$$\Omega(x) \sim \sum_{s=1}^{s=n} \frac{\mathfrak{A}_s}{x^s} \tag{12}$$

die aus (7) für $y = 0$ erhaltene asymptotische Reihe; dann ist wegen (9) und (10) für jedes ganze, nicht negative r:

$$\mathfrak{A}_r = \frac{1}{\alpha_n}\left(\beta_r - \sum_{s=0}^{s=n-1} \alpha_s \cdot \mathfrak{A}_r(n-s)\right). \tag{13}$$

Denken wir uns nun $\Re(x) > \Lambda - 1$, so sind die Funktionen (11) sämtlich nach (7) zu entwickeln, und die Identität (13) zeigt, daß (12) auch noch in diesem Falle richtig bleibt. Dasselbe muß dann weiter für $\Re(x) > \Lambda - 2$ der Fall sein; somit ergibt die vollständige Induktion den Satz:

Ist die Fakultätenreihe $\Omega(x)$ Lösung der Differenzengleichung (9), *so bleibt die asymptotische Reihe* (12) *immer für*

$$x = |x|\, e^{i\theta}, \ -\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq +\frac{\pi}{2}$$

richtig, oder die asymptotische Gleichheit (12) *bleibt auch für $\Re(x) < 0$ richtig, wenn nur dann $|\Re(x)|$ endlich ist.*

§ 112. Entwicklungen für $\Omega(u + iv)$, bei reellen u und v.

Wir haben hier noch die Funktion $\Omega(u + iv)$ zu untersuchen, in der u und v reelle Größen bedeuten. Falls eine dieser beiden Größen endlich bleibt, so reicht die Formel § 111, (7) für die

asymptotische Darstellung aus, es bedarf daher nur der Fall einer besonderen Untersuchung, in welchem sowohl $|u|$ als $|v|$ sehr groß sind.

Zu diesem Zwecke ziehen wir es vor, eine noch allgemeinere Aufgabe zu lösen, indem wir die Funktion $\Omega(x+iy)$ untersuchen, in der x und y ganz willkürliche reelle oder komplexe Zahlen bedeuten. Wir haben daher jeden der drei folgenden Fälle für sich zu untersuchen.

1) $|y|$ bleibt endlich, so daß x die eigentliche Veränderliche ist; die Formel § 111, (7) liefert dann unmittelbar folgende asymptotische Entwicklung:

$$\Omega(x+iy) \sim \sum_{s=1}^{s=n} \frac{\mathfrak{A}_s(iy)}{x^s}. \tag{1}$$

2) $|x|$ bleibt endlich; wir erhalten in ähnlicher Weise:

$$\Omega(x+iy) \sim \sum_{s=1}^{s=n} \frac{i^{-s}\mathfrak{A}_s(x)}{y^s}. \tag{2}$$

Die beiden asymptotischen Entwicklungen (1) und (2) bleiben also sicher brauchbar, falls nur der sehr entfernte Punkt $(x+iy)$ im Konvergenzbereiche der Fakultätenreihe $\Omega(x)$ liegt.

3) $y:x$ bleibt endlich; wir setzen hier:

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi,\quad y = x\operatorname{tg}\varphi,\quad x+iy = re^{i\varphi}, \tag{3}$$

wo φ eine endliche Größe bedeutet, für welche die Werte $s\cdot\frac{\pi}{2}$ ausgeschlossen sind, wenn s eine ganze Zahl bedeutet. Es ist dann wegen (3) und § 111, (12):

$$\Omega(x+iy) \sim \sum_{s=1}^{s=n} \frac{\mathfrak{A}_s\cdot e^{-s\varphi i}}{r^s} \tag{4}$$

zu setzen. Wir erhalten offenbar aus (4) wegen (3) zwei ähnliche Entwicklungen, wenn wir x oder y statt r einführen.

Was die Entwicklung von $\Omega(x+iy)$ in Fakultätenreihen betrifft, so liefert die Formel (1) vermöge § 111, (8), wenn dort iy statt y eingeführt wird, sicher eine solche Entwicklung; während dies für (2) oder (4), wie wir in Kapitel XIX gezeigt haben, jedenfalls nur dann möglich ist, wenn die zu $\Omega(x)$ gehörige Funktion $\varphi(t)$ entweder in t eine ganze Transzendente ist oder keine andere endliche singuläre Stelle als $t=0$ besitzt.

Wir betrachten zuerst den Fall, in welchem $\varphi(t)$ eine ganze transzendente Funktion ist. Die Methode des § 104 ergibt, daß:

$$(5)\quad \Omega(x+iy) = \frac{1}{i}\cdot\int_0^\infty f\left(\frac{z}{i}\right) e^{izx}\cdot e^{-zy}\,dt = \frac{1}{i}\cdot\int_0^1 \varphi(t^{-i})t^{-xi}\cdot t^{y-1}\,dt$$

sein muß, falls $\Re(x+iy)>0$ angenommen wird.

Die Formel (2) gibt demnach unmittelbar wegen § 111, (8) die gesuchte Entwicklung:

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\Omega(x+iy) = \frac{i\mathfrak{A}_1(x)}{y} + \\ &+\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{i^{s+1}C_s^0\mathfrak{A}_{s+1}(x) + i^s C_s^1\mathfrak{A}_s(x) + \cdots + i^2 C_s^{s-1}\mathfrak{A}_2(x)}{y(y+1)(y+2)\cdots(y+s)}, \end{aligned}\right.$$

die für $\Re(y)>0$ konvergiert.

In ähnlicher Weise findet man die zu (5) analoge Darstellung:

$$(7)\quad \Omega(x+iy) = e^{-\varphi i}\cdot\int_0^\infty (ze^{-\varphi i})e^{-zr}dz = e^{-\varphi i}\cdot\int_0^1 \varphi(t^{e^{-\varphi i}})t^{r-1}dt,$$

in der man also:

$$\Re(e^{-\varphi i}) \geqq 0, \quad \Re(x+iy)>0$$

annehmen muß. Somit liefert (4) wegen § 111, (8) die Entwicklung:

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\Omega(x+iy) = \frac{e^{-\varphi i}\mathfrak{A}_1}{r} + \\ &+ e^{-\varphi i}\cdot\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{e^{-s\varphi i}\cdot C_s^0\mathfrak{A}_{s+1} + e^{-(s-1)\varphi i}\cdot C_s^1\mathfrak{A}_s + \cdots + e^{-\varphi i}\cdot C_s^{s-1}\mathfrak{A}_2}{r(r+1)(r+2)\cdots(r+s)}, \end{aligned}\right.$$

die für $\Re(r)>0$ konvergiert.

Der andere mögliche Fall, daß $\varphi(t)$ nur die einzige endliche singuläre Stelle $t=0$ besitzt, läßt sich in ähnlicher Weise behandeln; die erhaltenen Formeln werden *formell* mit (6) und (8) identisch.

Kapitel XXI.

Anwendungen auf die Gammafunktion.

§ 113. Reihe von Schlömilch für $Q_a(x)$.

Offenbar läßt die allgemeine Theorie der Fakultätenreihen, die wir in den vorhergehenden Kapiteln entwickelt haben, namentlich mittels der Integraldarstellungen des Kapitel XIII, mehrere Anwendungen auf die Theorie der Gammafunktion zu.

Ehe wir indessen jenen Funktionentypus von diesem Gesichtspunkte aus untersuchen, wollen wir zuerst mit Schlömilch[1]) das bestimmte Integral:

$$(1) \qquad S(\nu,x) = \int_0^\infty \frac{e^{-tx}\,dt}{(1+t)^\nu} = \int_0^1 \frac{z^{x-1}dz}{(1-\log z)^\nu}, \quad \Re(x) > 0$$

betrachten. Es ist hier:

$$\varphi(z) = (1 - \log z)^{-\nu}$$

zu setzen, und diese Funktion ist im Innern des Kreises $|1 - z| = 1$ analytisch, während sie auf der Peripherie dieses Kreises nur die einzige singuläre Stelle $z = 1$ hat.

Da die entsprechende kritische Zahl λ gleich Null ist, so findet man für $S(\nu,x)$ eine Fakultätenreihenentwicklung von folgender Form:

$$(2) \qquad S(\nu,x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{A_s(\nu)}{x(x+1)\cdots(x+s)},$$

die für $\Re(x) > 0$ konvergiert, und in der wegen § 110, (3):

$$(3) \qquad \begin{cases} A_0(\nu) = 1, \\ A_n(\nu) = \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s C_n^{n-s-1} \cdot \nu(\nu+1)\cdots(\nu+s) \end{cases}$$

zu setzen ist.

Mit Schlömilch transformieren wir das Integral (1) durch die Substitution:

$$t = \frac{u}{x} - 1$$

und erhalten nach einer einfachen Rechnung:

$$(4) \qquad S(\nu,x) = x^{\nu-1} e^x \cdot \int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u^\nu}\,du.$$

Wir heben besonders die beiden speziellen Fälle $\nu = 1$, $\nu = \frac{1}{2}$ hervor. Es ist dann nämlich erstens:

$$(5) \qquad S(1,x) = -e^x \cdot \mathrm{li}\, e^{-x},$$

wo $\mathrm{li}\, e^{-x}$ den Integrallogarithmus bedeutet, und nach einer einfachen Transformation zweitens:

$$(6) \qquad S\left(\frac{1}{2}, x\right) = \frac{2e^x}{\sqrt{x}} \cdot \int_{\sqrt{x}}^\infty e^{-t^2}\,dt,$$

1) Zeitschrift für Math. und Physik, Bd. 4, p. 396; 1859.

d. h. unsere Funktion fällt mit der Transzendenten von Kramp[1]) zusammen.

Es ist das Verdienst Schlömilchs, diese beiden berühmten Transzendenten zum ersten Male in Fakultätenreihen entwickelt zu haben.

Schlömilch[2]) betrachtet ferner diejenigen Integrale, die aus (1) hervorgehen, wenn man $\pm ix$ statt x einführt; diese Integrale, die Schlömilch beträchtliche Schwierigkeiten bereiteten, können unmittelbar mittels der in § 105 entwickelten Methode behandelt werden.

Eine weitere Anwendung der Formel (1) ergibt sich, wenn wir das Integral (1) mit § 80, (3):

$$e^a a^{-x} \cdot Q_a(x) = \int_0^\infty e^{-az}(1+z)^{x-1}\,dz, \quad \Re(a) > 0$$

vergleichen. Wir finden, daß:

$$S(\nu, x) = e^x \cdot x^{1-\nu} \cdot Q_x(1-\nu)$$

sein muß; somit gewinnt man aus (2) für $Q_a(x)$ folgende Entwicklung:

$$e^a \cdot a^{-x} \cdot Q_a(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{A_s(1-x)}{a(a+1)\cdots(a+s)}, \quad \Re(a) > 0. \tag{7}$$

Diese Darstellung der schwer zugänglichen Funktion $Q_a(x)$, die anscheinend nicht früher beobachtet worden ist, ist zwar viel einfacher als die von J. Tannery[3]), indessen ist es mir nicht gelungen, die Potenzreihe für $Q_a(x)$ mittels (7) in einfacher Form darzustellen.

Wir bemerken, daß die Entwicklung (7), die ja einige Ähnlichkeit mit den Entwicklungen in Binomialkoeffizientenreihen hat, *nicht* in eine solche Reihe transformiert werden kann; denn diese Reihe wird mit der aus (7) mittels § 109, (15) erhaltenen asymptotischen Reihe in a identisch.

§ 114. Die Reihen von Binet für $\mu(x)$ und $\nu(x)$.

Wir kehren nunmehr zu den in § 70, (4) und (9) angegebenen Integraldarstellungen von Binet:

---

1) Analyse des réfractions astronomiques et terrestres, Straßburg 1799.

2) Zeitschrift für Math. und Physik, Bd. 4, p. 402; 1859.

3) Comptes rendus, Bd. 94, p. 1701; 1882.

$$(1)\qquad \nu(x)=\int_0^\infty\left(\frac{1}{e^t-1}-\frac{1}{t}+1\right)e^{-tx}dt=\int_0^1\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{\log t}\right)t^{x-1}dt,$$

$$(2)\quad \mu(x)=\int_0^\infty\left(\frac{1}{e^t-1}-\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\right)\frac{e^{-tx}}{t}dt=\int_0^1\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1-t}-\frac{1}{\log t}\right)\frac{t^{x-1}dt}{\log t}$$

zurück, die ja sämtlich für $\Re(x)>0$ einen Sinn haben.

Wenden wir zuerst die Entwicklung:

$$(3)\qquad \frac{1}{e^t-1}-\frac{1}{t}+\frac{1}{2}=\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s B_{s+1}}{(2s+2)!}\cdot t^{2s+1},\quad |t|<2\pi$$

an, wo B_1, B_2, B_3, $\cdots$ die Bernoullischen Zahlen bezeichnen, so liefern die Formeln § 110, (1), (3) unmittelbar die gesuchten Fakultätenreihen. Die Koeffizienten dieser Reihen, die somit die Bernoullischen und Stirlingschen Zahlen enthalten, weichen *formell* von denjenigen ab, die wir in §§ 33, 34 angegeben haben.

Eine Identifizierung dieser Koeffizientenausdrücke ergibt eine Reihe von Relationen zwischen den beiden obengenannten Zahlenklassen; die einfachste unter diesen Formeln ist wohl die folgende, die zuerst von Schlömilch[1]), später von Radicke[2]) gefunden worden ist:

$$(4)\qquad \sum_{s=0}^{\leq\frac{n}{2}-1}(-1)^s C_n^{n-2s-2}B_{s+1}=\frac{n-1}{2}\cdot\frac{(n-1)!}{n+1};$$

man vergleiche übrigens meine erste Abhandlung über die Stirlingschen Zahlen und Polynome.[3])

Auch die oben angedeuteten Koeffizienten der Binetschen Fakultätenreihen sind noch ziemlich kompliziert; wir wollen nunmehr zeigen, daß sich diese Koeffizienten in sehr einfacher Weise mittels der Stirlingschen Polynome ausdrücken lassen.

Zu diesem Zwecke setzen wir der Kürze halber:

$$(5)\qquad \varphi_1(t)=\frac{1}{1-t}+\frac{1}{\log t},$$

$$(6)\qquad \varphi_2(t)=-\frac{1}{(1-t)\log t}-\frac{1}{(\log t)^2}+\frac{1}{2\log t}$$

---

1) Grunert Archiv, Bd. 9, p. 334; 1848.

2) Die Rekursionsformeln für die Berechnung der Bernoullischen und Eulerschen Zahlen, p. 15; Halle 1880.

3) Annali di Matematica (3) Bd. 9; 1904.

die allgemeine Potenzreihenentwicklung § 28, (14):

$$\left(\frac{\log(1-t)}{-t}\right)^x = 1 + x \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \psi_s(x+s) \cdot t^{s+1}, \quad |t| < 1$$

ergibt dann ohne weiteres:

$$\varphi_1(1-t) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \psi_s(s-1) \cdot t^s,$$

$$\varphi_2(1-t) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \left(2\psi_{s+1}(s-1) - \psi_{s+1}(s) + \frac{1}{2}\psi_s(s-1)\right) t^s.$$

Da nun vermöge der Differenzengleichung für $\psi_n(x)$ in § 28, (10):

$$2 \cdot \psi_{s+1}(s-1) - \psi_{s+1}(s) + \frac{1}{2} \cdot \psi_s(s-1) = \left(s + \frac{1}{2}\right) \cdot \psi_s(s-1) - (s+2) \cdot \psi_{s+1}(s)$$

sein muß, so liefert die allgemeine Formel § 96, (2) wegen (1) und (2) die folgenden Entwicklungen:

$$\mu(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!\left[\left(s + \frac{1}{2}\right) \cdot \psi_s(s-1) - (s+2) \cdot \psi_{s+1}(s)\right]}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+s)}, \tag{7}$$

$$\nu(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!\, \psi_s(s-1)}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+s)}, \tag{8}$$

die beide für $\Re(x) > 0$ konvergieren; denn die Funktionen (5) und (6) haben in der ganzen endlichen t-Ebene nur die einzige singuläre Stelle $t = 0$; die entsprechende kritische Zahl ist offenbar gleich Null zu setzen.

Eine Anwendung der allgemeinen Stirlingschen Formel § 100, (10) führt mittels der Identität § 28, (11):

$$(x+n+2) \cdot \psi_n(x+n+1) = 1 + x \cdot \sum_{s=0}^{s=n} \psi_s(x+s)$$

zu den zwei weiteren Reihen von Binet:

$$\mu(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!\left[\frac{s+1}{2} \cdot \psi_s(s) - (s+2)\psi_{s+1}(s)\right]}{(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+s+1)}, \tag{9}$$

$$\nu(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!\,[1-(s+1)\psi_s(s)]}{(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+s+1)}, \tag{10}$$

die ebenfalls für $\Re(x) > 0$ konvergieren.

Für die in § 74, (20) eingeführte Funktion:

$$\Phi(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \left(\nu(x+s) - \frac{1}{2(x+s)} \right)$$

findet man ferner aus (8) und (10) vermöge der Stirlingschen Formel § 102, (13) die beiden Entwicklungen:

$$\Phi(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!\,\psi_{s+1}(s)}{x(x+1)\cdots(x+s)}, \tag{11}$$

$$\Phi(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!\,(1-(s+2)\cdot\psi_{s+1}(s+1))}{(x+1)(x+2)\cdots(x+s+1)}, \tag{12}$$

die gleichfalls für $\Re(x) > 0$ konvergieren.

Betrachten wir endlich die Funktion § 74, (25):

$$X(x) = \mu(x) + \frac{1}{2}\,\nu(x) + \Phi(x),$$

so fließen aus den vorhergehenden Entwicklungen die beiden anderen:

$$X(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(s+1)!\,(\psi_s(s-1) - \psi_{s+1}(s))}{x(x+1)\cdots(x+s)}, \tag{13}$$

$$X(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(s+1)!\left(\frac{3}{2s+2} - \psi_s(s) - \psi_{s+1}(s)\right)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+s+1)}, \tag{14}$$

die ebenfalls wieder für $\Re(x) > 0$ konvergieren.

Die in § 74 erwähnte Analogie zwischen den beiden Funktionen $\mu(x)$ und $X(x)$ tritt durch die eben entwickelten Fakultätenreihen deutlich hervor; wir werden indessen in § 117 noch einmal auf diese Analogie zurückkommen.

Für eine letzte Anwendung der Stirlingschen Polynome wollen wir noch das aus § 51, (2) hergeleitete Integral:

$$\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \int_0^1 \frac{t-1}{\log t} \cdot t^{x-1}\,dt, \quad \Re(x) > 0$$

in Betracht ziehen. Dieselbe Methode wie vorher liefert unmittelbar die beiden Entwicklungen:

$$(15)\qquad \log\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(s+1)!\,\psi_s(s-1)}{x(x+1)\cdots(x+s)},$$

$$(16)\qquad \log\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x+1}+\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{s!\,s\cdot\psi_{s-1}(s-1)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+s+1)},$$

welche wiederum für $\Re(x)>0$ konvergieren.

§ 115. Andere Fakultätenreihen aus der Theorie von $\Gamma(x)$.

Von den übrigen in unserer vorhergehenden Darstellung eingeführten Funktionen können noch mehrere in Fakultätenreihen entwickelt werden. Wir erwähnen z. B. die Funktion $H(x)$ in § 74, (17) und die Funktionen $\xi_1(x)$ und $\xi_2(x)$ in § 75, (9), (10); die Koeffizienten der so erhaltenen Reihen sind indessen nicht ganz einfach.

Für die Funktion § 75, (6) und § 92, (13):

$$\eta(x)=\int_0^1\frac{\log 2-\log(1+t)}{1-t}\,t^{x-1},\quad \Re(x)>0$$

findet man dagegen vermöge der Methode des § 96 die einfache Reihe:

$$(1)\qquad \eta(x)=\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{s!}{x(x+1)\cdots(x+s)}\cdot\frac{1}{(s+1)\cdot 2^{s+1}},$$

die mit Ausnahme der Pole $x=0,-1,-2,-3,\cdots$, in der ganzen x-Ebene konvergiert.

Binet[1]) gibt noch folgende einfache Reihe:

$$(2)\left(\frac{\Gamma(x)}{\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}\right)^2=\frac{1}{x}+\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{(1\cdot 3\cdot 5\cdots(2s-1))^2}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2s}\cdot\frac{2^{-s}}{x(x+1)\cdots(x+s)}$$

an, die für $\Re(x)>0$ konvergiert. Indessen ist die Formel (2) offenbar nur ein Spezialfall der in § 22, (10) mitgeteilten Gaußschen.

Aus:

$$(3)\qquad F(\alpha,\beta,\gamma,1)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)},\quad \Re(\gamma-\alpha-\beta)>0$$

findet man in der Tat:

$$\left(\frac{\Gamma(x)}{\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}\right)^2=\frac{1}{x}\cdot F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},x+1,1\right),\quad \Re(x)>0.$$

1) Journal de l'École Polytechnique, cahier 27, pp. 194—195; 1839.

Allgemeiner findet man mittels (3):

$$(4)\quad B(x, y) \cdot B(x, z) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)\Gamma(z)}{\Gamma(x+y+z)} \cdot F(y, z, y+z+x, 1), \quad \Re(x) > 0;$$

die Funktion linker Hand in (4) läßt sich somit in eine Fakultätenreihe entwickeln, falls $y + z$ eine ganze, nicht negative Zahl ist.

In diesem Zusammenhange darf wohl erwähnt werden, daß Schlömilch[1]) die Funktion:

$$\frac{\Gamma(x)}{\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{e^{\pm\frac{1}{4x+2}}}{\sqrt{x+\frac{1}{2}}},$$

man könnte also beinahe sagen, die Quadratwurzel der Funktion linker Hand in (2) in Fakultätenreihen entwickelt hat; indessen sind die Koeffizienten dieser Entwicklungen äußerst kompliziert. Dasselbe gilt für eine andere von Schlömilch[2]) *formell* für die Funktion:

$$\left(\frac{e}{x-\frac{1}{2}}\right)^{x+\frac{1}{2}} \cdot \Gamma(x)$$

gegebene Entwicklung in eine Fakultätenreihe; dazu kommt noch, daß es bisher nicht gelungen ist, die Existenz dieser Entwicklung in aller Strenge nachzuweisen.

Was die Integraldarstellung der Fakultätenreihe (2) anlangt, so ergibt das erste Eulersche Integral § 53, (1) unter Anwendung der Formeln des § 46 die noch allgemeinere Integralformel:

$$B(x, y) \cdot B(x, z) = \int_0^1 \chi(t) t^{x-1} dt,$$

wo der Kürze halber:

$$\chi(t) = \int_t^1 \frac{(1-u)^{y-1}}{u} \left(1 - \frac{t}{u}\right)^{z-1} du$$

gesetzt worden ist; durch die Substitution:

$$u - t = (1-t)v$$

gelangt man aber, wenn man noch $1 - t$ statt t einführt, zu der Formel:

$$\chi(1-t) = t^{y+z-1} \cdot \int_0^1 \frac{v^{y-1}(1-v)^{z-1}}{(1-vt)^z} dv,$$

1) Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 25, p. 352; 1880.

2) Ebenda Bd. 4, p. 432; 1859.

aus der wegen § 65, (4):

$$\chi(t) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(z)}{\Gamma(y+z)} \cdot t^{y+z-1} \cdot F(y, z, y+z, t)$$

folgt. Somit ergibt sich schließlich die gesuchte Integraldarstellung:

$$(5) \quad B(x, y) \cdot B(x, z) = \frac{\Gamma(y)\Gamma(z)}{\Gamma(y+z)} \cdot \int_0^1 (1-t)^{x-1} t^{y+z-1} F(y, z, y+z, t)\, dt,$$

die einen Sinn hat, falls gleichzeitig $\Re(y+z) > 0$, $\Re(x) > 0$ angenommen werden. Aus der Identität:

$$\Gamma(x) = x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} \sqrt{2\pi} \cdot e^{\mu(x)}$$

findet man nämlich mittels der Formel § 79, (21) von Stieltjes, daß der Grenzwert:

$$\lim_{t=1-0} \left(F(y, z, y+z, t) + \log(1-t)\right)$$

endlich ist.

Aus (5) geht deutlich hervor, daß das Integral rechter Hand dann und nur dann in eine Fakultätenreihe in x entwickelt werden kann, wenn $y+z$ eine positive ganze Zahl ist; dies stimmt mit unserer früheren Bemerkung sehr wohl überein.

§ 116. Asymptotische Reihen für $\Psi(x) - \Psi(x+y)$.

Als erstes Beispiel unserer allgemeinen Methode zur Herleitung asymptotischer Reihen für eine Fakultätenreihe wollen wir die Funktion:

$$(1) \qquad \beta(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\, dt = \int_0^\infty \frac{e^{-tx}}{1+e^{-t}}\, dt, \qquad \Re(x) > 0$$

in Betracht ziehen. Aus der Definition der *Tangentenkoeffizienten* $T_1, T_2, T_3, \ldots$:

$$(2) \qquad \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s T_{s+1}}{(2s+1)!} \cdot x^{2s+1}, \qquad |x| < \frac{\pi}{2}$$

fließt ohne weiteres folgende andere Entwicklung:

$$\frac{2}{1+e^{-t}} - 1 = \frac{e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}}{e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s T_{s+1}}{(2s+1)!} \cdot \left(\frac{t}{2}\right)^{2s+1}, \quad |t| < \pi;$$

aus ihr folgt wegen § 109, (15) unmittelbar die asymptotische Reihe:

$$\beta(x) \sim \frac{1}{2x} + \sum_{s=1}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^{s-1} T_s}{(2x)^{2s}}; \tag{3}$$

denn die Reihe rechter Hand in (3) muß für $n = \infty$, wie aus (2) erhellt, divergieren.

Da die für $\beta(x)$ erhaltene Fakultätenreihe in der ganzen x-Ebene außer in 0 und den negativen ganzen Zahlen konvergiert, so ist die asymptotische Reihe (3) demnach in jedem sehr entfernten Punkte der x-Ebene außer in der Achse der negativen reellen Zahlen anwendbar.

Aus (1) findet man nun weiter:

$$\beta\left(x + \frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{1 + e^{-t}} \cdot e^{-tx} dt, \qquad \Re(x) > -\frac{1}{2}; \tag{4}$$

diese Funktion ist aber offenbar in eine für $\Re(x) > -\frac{1}{2}$ konvergente Fakultätenreihe entwickelbar.

Aus der Definition der Eulerschen Zahlen $E_1, E_2, E_3, \ldots$:

$$\frac{2}{e^x + e^{-x}} = 1 + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^s E_s}{(2s)!} \cdot x^{2s}, \qquad |x| < \frac{\pi}{2} \tag{5}$$

gewinnt man folgende andere Entwicklung:

$$\frac{2e^{-\frac{t}{2}}}{1 + e^{-t}} = \frac{2}{e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}} = 1 + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^s E_s}{(2s)!} \cdot \left(\frac{t}{2}\right)^{2s}, \qquad |t| < \pi.$$

Somit erhalten wir wegen § 109, (15) die asymptotische Reihe:

$$\beta\left(x + \frac{1}{2}\right) \sim \frac{1}{2x} + \sum_{s=1}^{\leq \frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^s E_s}{(2x)^{2s+1}}, \tag{6}$$

die überall anwendbar ist, wo dies mit (3) der Fall ist; man hat nämlich die Identität:

$$\beta\left(x + \frac{1}{2}\right) + \beta\left(\frac{1}{2} - x\right) = \frac{\pi}{\cos \pi x} \tag{7}$$

und die Differenzengleichung:

$$\beta\left(x + \frac{3}{2}\right) + \beta\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{2x + 3}. \tag{8}$$

Aus (8) folgt nach dem letzten Satze des § 111, daß die Reihe (6) auch für ein negatives $\mathfrak{R}(x)$ anwendbar ist, falls nur $|\mathfrak{R}(x)|$ endlich ist; aus (7) folgt weiter, wenn n eine willkürliche endliche positive Zahl bedeutet, daß:

$$\lim_{|\mathfrak{R}(xi)| = +\infty} \left| \frac{x^n \cdot \pi}{\cos \pi x} \right| = 0$$

sein muß. Damit ist unsere Behauptung über die Reihe (6) vollständig bewiesen.

Wir wollen nunmehr die Funktion:

$$\beta(x-y) = \int_0^\infty \frac{e^{ty}}{1+e^{-t}} \cdot e^{-tx} dt, \qquad \mathfrak{R}(x-y) > 0 \tag{9}$$

untersuchen. Zu dem Ende gehen wir von der Definition der Bernoullischen Zahlen $B_1, B_2, B_3, \ldots$:

$$\frac{t}{e^t - 1} = 1 - \frac{t}{2} + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^{s-1} B_s}{(2s)!} \cdot t^{2s}, \qquad |t| < 2\pi \tag{10}$$

aus; demnach ist:

$$\frac{t}{1 - e^{-t}} = 1 + \frac{t}{2} + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^{s-1} B_s}{(2s)!} \cdot t^{2s}, \qquad |t| < 2\pi. \tag{11}$$

Somit ergibt die allgemeine Formel § 111, (3) die weitere Entwicklung:

$$\frac{e^{ty} \cdot t}{1 - e^{-t}} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \varphi_s(y) \cdot t^s, \qquad |t| < 2\pi, \tag{12}$$

wo die Funktion $\varphi_n(y)$ die Polynome von Bernoulli bedeuten:

$$\left\{ \begin{aligned} &\varphi_0(y) = 1, \\ &\varphi_1(y) = y + \frac{1}{2}, \\ &\varphi_n(y) = \frac{y^n}{n!} + \frac{1}{2} \cdot \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} - \sum_{s=1}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s B_s}{(2s)!} \cdot \frac{y^{2n-2s}}{(2n-2s)!}. \end{aligned} \right. \tag{13}$$

Aus (12) folgen nun ohne weiteres die beiden anderen Entwicklungen:

$$\frac{e^{ty}}{1-e^{-t}} + \frac{e^{ty}}{1+e^{-t}} = \frac{2e^{ty}}{1-e^{-2t}} = \frac{1}{t} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \varphi_s\left(\frac{y}{2}\right) \cdot (2t)^s, \qquad |t| < \pi,$$

$$\frac{e^{ty}}{1-e^{-t}} - \frac{e^{ty}}{1+e^{-t}} = \frac{2e^{t(y-1)}}{1-e^{-2t}} = \frac{1}{t} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \varphi_s\left(\frac{y-1}{2}\right) \cdot (2t)^s, \quad |t| < \pi,$$

aus denen sich durch Subtraktion:

$$(14)\qquad \frac{e^{ty}}{1+e^{-t}} = \sum_{s=0}^{s=\infty} 2^{s+1}\cdot\left(\varphi_{s+1}\left(\frac{y}{2}\right) - \varphi_{s+1}\left(\frac{y-1}{2}\right)\right)\cdot t^{s+1}, \qquad |t| < \pi$$

ergibt. Somit führt die allgemeine Formel § 111, (7) zu der asymptotischen Entwicklung:

$$(15)\qquad \beta(x-y) \sim \sum_{s=1}^{s=n} \frac{2^s(s-1)!\left(\varphi_s\left(\frac{y}{2}\right) - \varphi_s\left(\frac{y-1}{2}\right)\right)}{x^s},$$

die demnach anwendbar ist, falls $x-y$ derselben Bedingung genügt wie x in (3).

Wir wenden uns nunmehr zu der Funktion:

$$(16)\qquad \Psi(x) - \Psi(x-y) = \int_0^1 \frac{t^{-y}-1}{1-t}\cdot t^{x-1}dt = \int_0^\infty \frac{e^{ty}-1}{1-e^{-t}}\cdot e^{-tx}dt,$$

in der man gleichzeitig $\Re(x) > 0$, $\Re(x-y) > 0$ voraussetzen muß. Für diese Funktion haben wir schon in § 32, (7) die Fakultätenreihenentwicklung:

$$(17)\qquad \Psi(x) - \Psi(y) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{1}{s+1}\cdot\frac{y(y+1)\cdots(y+s)}{x(x+1)\cdots(x+s)}$$

gefunden, die für $\Re(x-y) > 0$ konvergiert; somit ergibt sich wegen (16) und (12) folgende asymptotische Darstellung:

$$(18)\qquad \Psi(x) - \Psi(x-y) \sim \sum_{s=1}^{s=n} \frac{(s-1)!\,(\varphi_s(y) - \varphi_s(0))}{x^s},$$

die also vorläufig für $\Re(x-y) > 0$ einen Sinn hat.

Aus § 5 findet man aber die Fundamentalgleichungen:

$$(19)\qquad \begin{cases} \Psi(x+1) - \Psi(x-y+1) = \Psi(x) - \Psi(x-y) + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-y}, \\ \Psi(x) - \Psi(x-y) - (\Psi(-x) - \Psi(-x+y)) = \\ \qquad = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+y} + \dfrac{\pi \sin \pi y}{\sin \pi x \cdot \sin \pi(x-y)}. \end{cases}$$

Da nun wegen (12) und (10):

$$\varphi_{2s+1}(0) = 0,$$
$$\varphi_{s+1}(-y) = (-1)^{s+1}\varphi_{s+1}(y) - \frac{y^s}{s!}$$

sein muß, so ist nach derselben Methode wie vorher die asymptotische Reihe (18) anwendbar, wenn nur die beiden Zahlen x und

$(x-y)$ in sehr großer Entfernung von der Achse der negativen Zahlen gelegen sind.

Da vermöge (12):

$$\varphi_{s+1}^{(1)}(y) = \varphi_s(y)$$

sein muß, so folgt aus (18) durch $(p-1)$-malige Differentiation nach y, die ja nach dem Satze in § 111 erlaubt ist, folgende andere asymptotische Reihe:

$$(20) \qquad (-1)^{p+1}\Psi^{(p)}(x-y) \sim \sum_{s=0}^{s=n-p} \frac{(p+s-1)!\,\varphi_s(y)}{x^{p+s}};$$

speziell für $y=0$ folgt aus ihr:

$$(21) \qquad (-1)^{p+1}\Psi^{(p)}(x) \sim \sum_{s=0}^{s=n-p} \frac{(p+s-1)!\,\varphi_s(0)}{x^{p+s}}.$$

Endlich bemerken wir noch, daß uns eine Anwendung der zweiten Stirlingschen Methode von (18) auf (17) führen muß; dadurch ergibt sich folgende Entwicklung nach Bernoullischen Polynomen:

$$(23) \qquad \frac{y(y+1)\cdots(y+n)}{n+1} = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{C_n^{n-s-1}}{s!}\cdot(\varphi_{s+1}(y)-\varphi_{s+1}(0)).$$

§ 117. Die Stirlingschen Reihen für $\mu(x)$ und $\nu(x)$.

Als zweites Beispiel betrachten wir die Funktion:

$$(1) \qquad \mu(x) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right)\frac{e^{-tx}}{t}\,dt, \qquad \Re(x) > 0.$$

Wir erhalten ohne Mühe wegen § 116, (11) folgende asymptotische Reihe:

$$(2) \qquad \mu(x) \sim \sum_{s=0}^{s\leq\frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^s B_{s+1}}{(2s+1)(2s+2)}\cdot\frac{1}{x^{2s+1}},$$

die sicher für $-\frac{\pi}{2} < \Theta < +\frac{\pi}{2}$ anwendbar ist, falls $x = |x|\cdot e^{i\Theta}$ gesetzt wird.

Nun hat man aber wegen § 34, (6):

$$\mu(x+1) = \mu(x) - \left[\left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1\right],$$

wo die Funktion rechter Hand in eine Reihe entwickelt werden kann, die nach negativen ganzen Potenzen von x fortschreitet; somit

muß auch die Formel (2) für $\Theta = \pm \frac{\pi}{2}$ richtig bleiben. Weiter ist wegen § 37, (10):

$$\mu(x) + \mu(-x) = -\log(1 - e^{-2\pi x' i}),$$

wo $x' = \pm x$ zu setzen ist, je nachdem $\Theta \gtrless 0$ angenommen wird; demnach ist die asymptotische Reihe (2) für $-\pi < \Theta < +\pi$ anwendbar.

Da nun:

$$\nu(x) = \frac{1}{2x} - \mu^{(1)}(x)$$

ist und die asymptotische Reihe (2) differentiiert werden darf, so ergibt sich ohne weiteres die folgende Entwicklung:

$$\nu(x) \sim \frac{1}{2x} - \sum_{s=1}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s B_s}{2s \cdot x^{2s}}, \tag{3}$$

die ebenfalls für $-\pi < \Theta < +\pi$ anwendbar ist. Damit haben wir einen neuen Beweis für den folgenden Satz geliefert:

Die Stirlingschen Reihen (2) *und* (3) *sind für sehr große* $|x|$ *und* $-\pi < \Theta < +\pi$ *anwendbar, wenn* $x = |x| \cdot e^{i\Theta}$ *gesetzt wird.*

Der Ausdruck des Restgliedes für die beiden Reihen (2) und (3), den wir aus § 109, (20) kennen, ist indessen sehr kompliziert, so daß diese Herleitung der Stirlingschen Reihe praktisch nicht so brauchbar ist wie die frühere in § 79 entwickelte.

Aus den Entwicklungen § 116, (11), (12) folgt ohne weiteres die andere:

$$\frac{e^{-ty}}{t}\left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right) = \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \left[\varphi_{s+2}(y) - \frac{y^{s+2}}{(s+2)!} - \frac{y^{s+1}}{2 \cdot (s+1)!}\right] t^s;$$

mittels (1) und § 111, (7) erhält man aus ihr nach einer einfachen Rechnung folgende andere asymptotische Reihe:

$$\begin{cases} \mu(x+y) + \left(x - \frac{1}{2}\right)\log\left(1 - \frac{y}{x}\right) - y\log\left(1 + \frac{y}{x}\right) - y \sim \\ \qquad \sim \sum_{s=1}^{s=n} \frac{(s-1)!\,\varphi_{s+1}(y)}{x^s}; \end{cases} \tag{4}$$

unter Anwendung der schon im vorigen Paragraphen erwähnten Identität:

$$(-1)^n \varphi_n(-y) = \varphi_n(y) - \frac{y^{n-1}}{(n-1)!}$$

ergibt sich aus ihr, indem man das Zeichen von y wechselt, die analoge Entwicklung:

$$(5)\quad \begin{cases} \mu(x-y) + \left(x - \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{y}{x}\right) + y\log\left(1 - \frac{y}{x}\right) - \\ \quad - y + y\log\left(1 - \frac{y}{x}\right) \sim \sum_{s=1}^{s=n} \frac{(s-1)!\,\varphi_{s+1}(y)}{x^s}. \end{cases}$$

Die Formeln (4) und (5) sind beide anwendbar, falls y endlich bleibt, während x in überaus großer Entfernung von der Achse der negativen reellen Zahlen liegt.

Wir transformieren noch die beiden Formeln (4) und (5), indem wir vermöge der Identität:

$$\mu(x) = \log\Gamma(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)\log x + x - \log\sqrt{2\pi}$$

für $\log\Gamma$ die entsprechenden Funktionen einführen. Wir gelangen so leicht zu folgenden Entwicklungen:

$$(6)\quad \frac{1}{2}\log\frac{\Gamma(x+y)\Gamma(x-y+1)}{\Gamma(x)\Gamma(x+1)} \sim \sum_{s=0}^{\leq\frac{n-1}{2}} \frac{(2s)!\,(\varphi_{2s+2}(y) - \varphi_{2s+2}(0))}{x^{2s+1}},$$

$$(7)\quad \frac{1}{2}\log\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x-y+1)} - \left(y - \frac{1}{2}\right)\log x \sim -\sum_{s=1}^{\leq\frac{n}{2}} \frac{(2s-1)!\,\varphi_{2s+1}(y)}{x^{2s}},$$

welche man Sonin[1]) verdankt. Später sind sie von Stieltjes[2]) und Hermite[3]) betrachtet worden.

Was die Funktionenwerte $\nu(x \pm y)$ betrifft, so kann man für sie aus (4) und (5) durch Differentiation nach x oder y ganz ähnliche Reihen herleiten.

Weiter bemerken wir, daß sich die Theorien des § 112 ohne weiteres auf die Funktionen $\mu(x)$ und $\nu(x)$ anwenden lassen; indessen scheinen die so erhaltenen Formeln für komplexe Werte von x nicht praktischer zu sein als die Reihen (2) und (3).

Die in § 8 eingeführten Funktionen $P(x, y)$ und $\Theta(x, y)$ können auch unmittelbar vermöge (6) und (7) entwickelt werden, scheinen aber auch nicht gerade praktisch brauchbar zu sein.

---

1) Annalen der Universität Warschau 1888. Journal für Mathematik Bd. 116, p. 137; 1895.

2) Journal de Mathématiques, (4) Bd. 5, p. 440; 1889.

3) Journal für Mathematik Bd. 116, p. 201—205; 1895.

§ 118. Analogie zwischen $\Delta^{-1}\Psi(x)$ und $\log \Gamma(x)$.

Durch eine letzte Anwendung unserer allgemeinen Theorie wollen wir schließlich noch die schon in den §§ 74 und 114 erwähnte Analogie zwischen dem endlichen Integrale $\Delta^{-1}\Psi(x)$ und dem gewöhnlichen Integrale $\log\Gamma(x)$ von $\Psi(x)$ vollständig aufzuklären suchen.

Zu diesem Zwecke benutzen wir die Funktion § 74, (26):

$$(1)\quad X(x) = \frac{1}{4x} + \int_0^\infty \left[\left(\frac{1}{e^t - 1} + 1\right)^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right)^2\right] e^{-tx} dt, \quad \Re(x) > 0.$$

Die Entwicklung § 116, (10):

$$\frac{1}{e^t - 1} = \frac{1}{t} - \frac{1}{2} + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^{s-1} B_s}{(2s)!} \cdot t^{2s-1}, \qquad |t| < 2\pi$$

ergibt sodann durch Differentiation nach t und unter Anwendung der Identität:

$$\frac{e^t}{(e^t-1)^2} = \frac{1}{(e^t-1)^2} + \frac{1}{e^t - 1}$$

die entsprechende Entwicklung:

$$(2)\quad \left(\frac{1}{e^t - 1} + 1\right)^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{3} + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\mathfrak{B}_s}{(s+1)!} \cdot t^s, \quad |t| < 2\pi,$$

wo der Kürze halber für $n \geqq 1$:

$$(3)\quad \begin{cases} \mathfrak{B}_{2n-1} = (-1)^{n-1} \cdot B_n, \\ \mathfrak{B}_{2n} \phantom{{}_{-1}} = (-1)^n \cdot \dfrac{2n+1}{2n+2} \cdot B_{n+1} \end{cases}$$

zu setzen ist.

Die gewöhnliche Methode liefert ferner vermöge (1) und (2) die asymptotische Reihe:

$$(4)\quad X(x) \sim -\frac{1}{3x} + \sum_{s=1}^{s=n-1} \frac{\mathfrak{B}_s}{(s+1)x^{s+1}},$$

die sicher für sehr große $|x|$ und $-\frac{\pi}{2} < \Theta < +\frac{\pi}{2}$ brauchbar ist, wenn man:

$$x = |x| \cdot e^{i\Theta}$$

setzt.

Um nun die Tragweite der Formel (4) zu untersuchen, führen wir die Funktion § 74, (20):

(5)
$$\Phi(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \left(\nu(x+s) - \frac{1}{2(x+s)} \right)$$

ein; es ist dann nämlich wegen § 74, (25):

(6)
$$X(x) = \mu(x) + \frac{1}{2}\nu(x) + \Phi(x).$$

Eine Anwendung der Formel von **Stieltjes** § 70, (20):

$$\nu(x) - \frac{1}{2x} = \int_0^\infty \frac{A(t)}{(t+x)^2}\, dt$$

ergibt sodann für $\Phi(t)$ ohne weiteres folgende andere Integraldarstellung:

(7)
$$\Phi(x) = \int_0^\infty A(t) \cdot \Psi^{(1)}(t+x)\, dt,$$

die mit Ausnahme der Achse der negativen reellen Zahlen die Funktion $\Phi(x)$ in der ganzen x-Ebene darstellt.

Die Formel (7) kann aber offenbar nach der in § 79 entwickelten Methode von **Stieltjes** behandelt werden; die Formel § 79, (11) ergibt in der Tat:

(9)
$$\begin{cases} \Phi(x) = \displaystyle\sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^s B_{s+1}}{(2s+2)!} \cdot \Psi^{(2s+1)}(x) + \\ \qquad + (-1)^n \cdot \displaystyle\int_0^\infty 2 A_{2n+1}(t) \cdot \Psi^{(2n+1)}(t+x)\, dt. \end{cases}$$

Da nun, wenn x nicht negativ reell ist:

$$\lim_{|x|=\infty} \left| x^{2n} \cdot \int_0^\infty A_{2n+1}(t)\, \Psi^{(2n+1)}(t+x)\, dt \right| = 0$$

sein muß, so kann, wie (8) in Verbindung mit § 116, (19) zeigt, $\Phi(x)$ und somit auch $X(x)$ in eine asymptotische Reihe entwickelt werden, die für $-\pi < \Theta < +\pi$ gültig bleibt. Da eine solche Entwicklung nur auf eine Weise möglich ist, so folgt der Satz:

Die für $X(x)$ hergeleitete asymptotische Reihe (4) *ist für sehr große* (x) *und* $-\pi < \Theta < +\pi$ *brauchbar.*

Die Fakultätenreihen des § 114 und die asymptotischen Reihen (4) und § 116, (2) zeigen deutlich die vollkommene Analogie der beiden Funktionen $\mu(x)$ und $X(x)$, und daraus folgt unmittelbar mittels der Formeln:

$$\log \Gamma(x) = \mu(x) - (x - \tfrac{1}{2}) \log x + x - \log \sqrt{2\pi},$$

$$\Delta^{-1} \Psi(x) = X(x) + (x - 1) \log x - x + \log \sqrt{2\pi}$$

die entsprechende Analogie der beiden Funktionen $\log \Gamma(x)$ und $\Delta^{-1} \Psi(x)$.

Der Kuriosität halber erwähnen wir noch, daß die Formel von Poisson § 71, (11):

$$\nu(x) - \frac{1}{2x} = \int_0^\infty \frac{2z\,dz}{(z^2 + x^2)(e^{2\pi z} - 1)}$$

mittels (5) und unter Anwendung der Identität:

$$\Psi(x + iz) - \Psi(x - iz) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{2zi}{z^2 + (x + s)^2}$$

noch folgende andere Integraldarstellung von $\Phi(x)$:

(9) $$\Phi(x) = \frac{1}{i} \cdot \int_0^x \frac{\Psi(x + iz) - \Psi(x - iz)}{e^{2\pi z} - 1}\,dz, \qquad \Re(x) > 0$$

liefert.

Das Integral rechter Hand in (9) bietet offenbar dieselbe Eigentümlichkeit dar, welche Petersen für das obengenannte Integral von Poisson nachgewiesen hat.

Literaturverzeichnis.*)

A. Theorie und analytische Anwendungen.

Abel, N. H.: 1) Sur quelques intégrales définies. *Journal für Math.* Bd. 2, p. 22—30; 1827. *Werke,* Bd. I, p. 251—262.

2) Sur l'intégrale définie $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}\left(\log\frac{1}{x}\right)^{a-1}dx$. *Werke,* Bd. II, p. 7—13.

Adams, J. C.: Note on the value of Euler's constant likewise on the values of the napierian logarithms of 2, 3, 5, 7 and 10 and of the modulus of common logarithms, all carried to 260 places of decimals. *Royal Soc. of London Proceedings,* Bd. 28, p. 88—94; 1878.

Appell, P.: 1) Évaluation d'une intégrale définie. *Comptes rendus* Bd. 86, p. 874—876; 1878.

2) Sur quelques applications de la fonction $\Gamma(x)$ et d'une autre fonction transcendante. *Comptes rendus* Bd. 86, p. 953—956; 1878.

Arentz: Om Funktionen $\Gamma(m)$ isaer med Hensyn til dens numeriske Evaluation. *Indbydelsesskrift;* Christiania 1850.

Arndt, F.: Über bestimmte Integrale. *Grunert Archiv* Bd. 6, p. 431—439; 1845.

2) Über einen von Gauß gefundenen Ausdruck der Gammafunktion. *Grunert Archiv,* Bd. 10, p. 250—253; 1847.

3) Zwei Entwicklungen des bestimmten Integrals $\int_0^1\left(\frac{x^{a-1}}{1-x}-\frac{nx^{na-1}}{1-x^n}\right)dx$. *Grunert Archiv,* Bd. 10; 1847.

4) Über die numerische Bestimmung der Konstante des Integrallogarithmus. *Grunert Archiv,* Bd. 11, p. 315—328; 1848.

Bacaloglo, E.: Über das bestimmte Integral $\int_0^{\sqrt[n]{\frac{a}{b}}}(a-bx^n)^{\frac{p}{q}}x^{m-1}dx$. *Grunert Archiv* Bd. 35, p. 70—72; 1860.

*) Nicht angeführt sind hier Arbeiten, welche entweder nur die Fakultäten behandeln, oder die Gammafunktion nur einführen, ohne doch neue Eigenschaften oder Methoden zu geben, wie z. B. die meisten Lehrbücher der Analysis tun.

Bachmann, P.: Über einige bestimmte Integrale. *Math. Annalen* Bd. 15, p. 424—432; 1879.

Baker, H. F.: Note on the gamma function. *Messenger* (2) Bd. 25, p. 125—128; 1895.

Barbieri, G. A.: Alcune ricerche relative alla funzione Γ euleriana. *Periodico di Mat.* (2) Bd. 4, p. 276—278; 1902.

Barnes, E. W.: The theory of the gamma function. *Messenger* (2) Bd. 29, p. 64—128; 1899.

Bauer, G.: Von den Gammafunktionen und einer besonderen Art unendlicher Produkte. *Journal für Math.* Bd. 57, p. 256—272; 1860.

Beaupin, J.: 1) Sur l'intégrale Eulérienne de première espèce. *Annales de l'École Normale* (3) Bd. 9, p. 309—328; 1892.

2) Sur l'intégrale Eulérienne de première espèce. *Belg. Mém. Couronnés et Savants étrangers* Bd. 58, 18 S.; 1894.

3) Sur une extension de la formule de Stirling. *Bulletin de Belgique* 1902, p. 943—945.

Bellavitis, G.: Tavole numeriche de logarithmo integrale ovv. dell' esponenziale integrale e di altri integrali euleriani. *Mem. Istituto Veneto* Bd. 18, p. 125—162; 1874.

Berger, A.: 1) Sur quelques applications de la fonction gamma à la théorie des nombres. *Akad. Afhandl. Upsala* 1880. Auch separat bei E. Berling; Upsala 1882.

2) Sur quelques applications de la fonction gamma. *Nova Acta Upsalensia;* 1881.

3) En generalisation af några formler i gammafunktionens theori. *Öfversigter der Stockholmer Akademie;* 1881, p. 13—30.

Besgue: Somme d'une série. *Journal des Math.* (2) Bd. 5, p. 367—368; 1860.

Bessel, F. W.: Über die Theorie der Zahlenfakultäten. *Königsberger Archiv* Bd. 1; 1812. *Abhandlungen*, Bd. II, p. 342—352.

Bidone: Mémoire sur diverses intégrales définies. *Mém. de Turin* Bd. 20, p. 231—245; 1811.

Bierens de Haan, D.: 1) Table d'intégrales définies. 1858; 2. Aufl. 1867.

2) Exposé de la théorie, des propriétés, des formules de transformation et des méthodes d'évaluation des intégrales définies. 1862.

3) Sur quelques intégrales définies. *Arch. Néerlandaises* Bd. 8, p. 135—147; 1873.

4) De l'integrale $\int_a^b \log \Gamma(x)\, dx$. *Arch. Néerlandaises* Bd. 8, p. 148—152; 1873.

5) Bydragen tot de theorie der bepaaldten integrale. *Verslagen en Meded.* Bd. 7, p. 12—31; 1873.

Bigler, U.: Über Gammafunktionen mit beliebigem Parameter. *Journal für Math.* Bd. 102, p. 237—254; 1888.

Binet, J.: 1) Mémoire sur les intégrales Eulériennes et sur leur application à la théorie des suites, ainsi qu'à l'évaluation des fonctions de grands nombres. *Journal de l'École Polytechn.* cahier 27, p. 123—343; 1839. *Comptes rendus* Bd. 9, p. 39—45; 1839.

2) Note sur l'expression du logarithme de l'intégrale Eulérienne $\Gamma(p)$. *Comptes rendus* Bd. 9, p. 156—159; 1839.

3) Note sur la détermination de l'intégrale Eulérienne binôme

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

dans le cas où l'un des arguments p et q est un nombre rationnel. *Comptes rendus*, Bd. 16, p. 377—381; 1843.

Björling, C. F. G.: Bevis för formlen $\int_0^1 \log \Gamma(x+p)\,dx = \frac{1}{2}\log 2\pi + p\log p - p$. *Öfversigter der Stockholmer Akademie;* 1856, p. 181—182.

Blaserna, P.: Sopra una nuova trascendente*) in relazione alle funzioni Γ e Z. *Memorie Acad. dei Lincei Roma* Bd. 292, p. 499—577; 1895.

Blissard: On certain properties of the gamma function. *Quarterly Journal* Bd. 9, p. 280—296; 1860.

Boncompagni, B.: Recherches sur les intégrales définies. *Journal für Math.* Bd. 25, p. 74—96; 1843.

Bonnet, O.: Sur la formule de Stirling. *Comptes rendus* Bd. 50, p. 862—866; 1860.

Bourguet, L.: 1) Développements en séries des intégrales Eulériennes. *Diss. Annales de l'École Normale* (2) Bd. 10, p. 175—233; 1881.

2) Sur les intégrales Eulériennes. *Darboux Bulletin* (2) Bd. 5, p. 43—51; 1881.

3) Sur la détermination des maxima et minima de la fonction $\Gamma(x)$. *Atti di Torino* Bd. 16, p. 758—772; 1881.

4) Sur les intégrales Eulériennes. *Acta Mathematica* Bd. 1, p. 295—296; 1882.

5) Sur quelques intégrales définies. *Acta Mathematica* Bd. 1, p. 363—367; 1882.

6) Sur les intégrales Eulériennes et quelques autres fonctions uniformes. *Acta Mathematica* Bd. 2, p. 261—295; 1883.

7) Sur la fonction Eulérienne. *Acta Mathematica* Bd. 2, p. 296—298; 1883.

8) Sur la fonction Eulérienne. *Comptes rendus* Bd. 96, p. 1307—1310; 1883.

9) Sur la théorie des intégrales Eulériennes. *Comptes rendus* Bd. 96, p. 1487—1490; 1883.

Brunel, G.: 1) Monographie de la fonction gamma. *Mém. de Bordeaux* (3) Bd. 3, p. 1—184; 1886.

2) In *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften.*

Buchwaldt, F.: Summation of Rækker. *Tidsskrift for Math.* (4) Bd. 2, p. 76—93; 1878.

Cahen, E.: Sur la fonction $\xi(s)$ de Riemann et sur des fonctions analogues. *Diss. Annales de l'École Normale* (3) Bd. 11, p. 75—164; 1894.

Callendreau, O.: Sur une intégrale définie. *Comptes rendus* Bd. 89, p. 90—92; 1879.

Catalan, E.: 1) Note sur une équation aux différences finies. *Journal de Math.* Bd. 3, p. 508—516; 1838.

---

*) Die Funktion ist nach unseren Bezeichnungen: $D_x(x\cdot\Psi(x+1))$.

2) Mémoire sur la réduction d'une classe d'intégrales multiples. *Journal de Math.* Bd. 4, p. 323—344; 1839.

3) Note sur l'intégrale $\int\limits_0^\infty \frac{\cos ax}{(1+x^2)^n}\, dx$. *Journal de Math.* Bd. 5, p. 110—114; 1840.

4) Théorème sur la réduction d'une intégrale multiple. *Journal de Math.* Bd. 6, p. 81—84; 1841.

5) Sur une application de la formule de binôme aux intégrales Eulériennes. *Comptes rendus* Bd. 47, p. 545—549; 1858.

6) Sur la constante d'Euler et la fonction de Binet. *Comptes rendus* Bd. 77, p. 198—201; 1872. *Journal de Math.* (3) Bd. 1, p. 209—240; 1875.

7) Rapport sur le Mémoire de Mr. Gilbert. *Bull. de Belgique* (2) Bd. 36, p. 4—16; 1873.

8) Sur quelques formules relatives aux intégrales Eulériennes. *Mém. de Belgique* Bd. 42, 1878, 20 S.

9) Recherches sur la constante G*) et sur les intégrales Eulériennes. *Mém. de St. Pétersbourg* Bd. 31, p. 1—51; 1883.

10) Quelques théorèmes sur les intégrales Eulériennes. *Bull. de Belgique* (3) Bd. 22, p. 459—460; 1891.

11) Nouvelles notes d'algèbre et d'analyse. *Mém. de Belgique* Bd. 48; 1892, 98 S.

12) Intégrales Eulériennes ou elliptiques. *Mém. de Belgique* Bd. 49; 1893, 20 S.

13) Recherches sur quelques produits infinis et sur la constante G.*) *Mém. de Belgique* Bd. 51; 1893, 28 S.

Cauchy, A. L.: 1) Mémoires sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires. Paris 1825.

2) Exercices de Mathématiques. I. II. Paris 1826—1827.

3) Recherches d'une formule générale qui fournit la valeur de la plupart des intégrales définies connues et celle d'un grand nombres d'autres. *Annales de Gergonne* Bd. 17; 1827.

4) Mémoire sur diverses formules relatives à la théorie des intégrales définies. *Journal de l'École Polytechn.* cahier 28, p. 147—248; 1841.

5) Exercices d'Analyse et de Physique mathématique Bd. II; Paris 1841.

6) Mémoire sur la théorie des intégrales définies singulières appliquées généralement à la détermination des intégrales définies et en particulier à l'évaluation des intégrales Eulériennes. *Comptes rendus* Bd. 16, p. 422—433; 1843.

7) Recherches sur les intégrales Eulériennes. *Comptes rendus* Bd. 17, p. 370—377; 1843.

8) Note sur les intégrales Eulériennes. *Comptes rendus* Bd. 19, p. 67—73; 1844.

9) Sur un nouveau genre de développements des fonctions qui permettent d'abréger notablement les calculs astronomiques. *Comptes rendus* Bd. 19, p. 1123—1131; 1844.

*) Es ist $G = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \cdots$.

10) Sur une formule de M. Anger et d'autres formules analogues. *Comptes rendus* Bd. 39, p. 129—135; 1854.

Cayley, A.: 1) Sur quelques formules du calcul intégral. *Journal de Math.* Bd. 12, p, 231—240; 1847.

2) Gegenbemerkungen zu Liouville. *Journal de Math.* (2) Bd. 2, p. 47; 1857.

3) The numerical value of $\Gamma(1+i)$. *Messenger* (2) Bd. 23, p. 36—38; 1893.

Cesàro, E.: 1) Une démonstration de la formule de Stirling. *Nouv. Corresp. Math.* Bd. 6, p. 354—357; 1880.

2) Démonstration élémentaire de la formule de Stirling. *Nouvelles Annales* (3) Bd. 2, p. 43—46; 1883.

Cisa de Grésy: Mémoires sur les intégrales définies. *Mém. de Turin* Bd. 26, p. 209—396; 1821.

Clariana y Ricart, L.: 1) Relacion entre les duos integrales Eulerianas. *Com. cient.* Bd. 4, p. 209—211; 1881.

2) Applicaciòn a la mecánica de la fòrmola de L. Dirichlet. *Progreso mat.* (2) Bd. 2, p. 179—185; 1900.

Claussen, Th.: 1) Gegenbemerkungen zu Schlömilch in *Grunert Archiv* Bd. 13, p. 334—336; 1849.

2) Über die Ableitung des Differentials von $\Gamma(x)$. *Grunert Archiv* Bd. 30, p. 166—170; 1858.

Crelle, A. L.: Mémoire sur la théorie des puissances, des fonctions angulaires et des facultés analytiques. *Journal für Math.* Bd. 7. pp. 253—305, 314—380; 1831.

Dedekind, R.: 1) Über die Elemente der Eulerschen Integrale. *Diss.* Berlin 1852.

2) Über ein Eulersches Integral. *Journal für Math.* Bd. 45, p. 370—374; 1853.

Degen, C. F.: Tabularum ad faciliorem et breviorem probabilitatis computationem utilium enneas. Kopenhagen 1824.

Dienger, F.: Summen von Reihen ausgedrückt durch bestimmte Integrale. Anwendungen dieser Sätze. *Journal für Math.* Bd. 46, p. 119—144; 1853.

Dietrich: Über eine Reihentransformation Stirlings. *Journal für Math.* Bd. 59, p. 163; 1861.

Eggenberger, J.: Beiträge zur Darstellung des Bernoullischen Theorems, der Gammafunktion und des Laplaceschen Integrals. *Diss. Berner Naturf. Ges.* 1893, p. 110—182.

Enneper, A.: 1) Über die Funktion Π von Gauß mit komplexem Argument. *Diss.* Göttingen 1856.

2) On the function $\Gamma(x)$ with imaginary and complexe variable. *Quarterly Journal* Bd. 1, p. 393—405; 1857.

3) Bemerkung über die Gammafunktion. *Zeitschrift für Math. und Physik* Bd. 7, p. 189—190; 1862.

4) Über einige bestimmte Integrale. *Zeitschrift für Math. und Physik* Bd. 18, p. 407—415; 1873.

Euler, L.: 1) in Correspondance math. et phys. de quelques célèbres géomètres du 18e siècle, publiée par Fuss. St. Pétersbourg 1843.

2) De summatione innumerabilium progressionum. *Commentarii Acad. Petropolitanae* Bd. 5, p. 91—104; (1730—1731) 1738.

3) De progressionibus transcendentibus seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt. *Comment. Acad. Petrop.* Bd. 5, p. 36—57; (1730—1731) 1738.

4) De summis serierum reciprocarum. *Comment. Acad. Petrop.* Bd. 7, p. 23—133; (1734—1735) 1740.

5) De progressionibus harmonicis observationes. *Comment. Acad. Petrop.* Bd. 7, p. 150—161; (1734—1735) 1740.

6) De productis ex infinitis factoribus ortis. *Comment. Acad. Petrop.* Bd. 11, p. 3—31; (1739) 1750.

7) Theoremata circa reductionem formularum integralium ad circuli quadraturam. *Miscellanea Berolinensia* Bd. 7, p. 3—21; 1743.

8) Institutiones calculi differentialis; 1755 (2. Aufl. 1787).

9) De expressione integralium per factores. *Novi Comm. Acad. Petrop.* Bd. 6, p. 115—154; (1756—1757) 1761.

10) Observationes circa integralia formularum $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{\frac{q-1}{n}}dx$ posito post integrationem $x = 1$. *Miscellanea Taurinensia* Bd. 3, p. 156—177; 1762—1765.

11) Institutiones calculi integralis; 1768—1770 (2. Aufl. 1792—1794).

12) De summis serierum numeros Bernoullianos involventium. *Novi Comm. Acad. Petrop.* Bd. 14, p. 129—167; (1769) 1770.

13) Evolutio formulae integralis $\int x^{f-1}(\log x)^{\frac{m}{n}}dx$ integratione a valore $x = 0$ ad $x = 1$ extensa. *Novi Comm. Acad. Petrop.* Bd. 16, p. 91—139; 1771.

14) De valore formulae integralis $\int \frac{z^{\lambda-\omega} \pm z^{\lambda+\omega}}{z \pm z^{2\lambda}} (\log z)^\mu \frac{dz}{z}$ casu quo post integrationem ponitur $z = 1$. *Novi Comm. Acad. Petrop.* Bd. 19, pp. 3—29, 30—65, 66—102; (1774) 1775.

15) Speculationes analyticae. *Novi Comm. Acad. Petrop.* Bd. 20, p. 59—79; (1775) 1776.

16) De integratione formulae $\int \frac{dx \log x}{\sqrt{1-x^2}}$ ab $x = 0$ ad $x = 1$ extensae. *Acta Acad. Petrop.* 1777 II, p. 3—28; 1780.

17) De valore formulae integralis $\int \frac{x^{a-1}dx}{\log x} \cdot \frac{(1-x^b)(1-x^c)}{1-x^n}$ a termino $x = 0$ usque ad $x = 1$ extensae. *Acta Acad. Petrop.* 1777 II, p. 29—47; 1780.

18) Nova methodus integrandi formulas differentiales rationales sive subsidio quantitatum imaginarium. *Acta Acad. Petrop.* 1781 I, p. 3—41; 1785.

19) De numero memorabili in summatione progressionis harmonicae naturalis occurrente. *Acta Acad. Petrop.* 1781 I, p. 45—75; 1785.

20) De memorabilium proprietatibus unciarum, quae in evolutione binomii ad potestatem quamcumque evecti occurrunt. *Acta Acad. Petrop.* 1781 I p. 77—111; 1785.

21) Comparatio valorum formulae integralis $\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$ a termino $x=0$ usque ad $x = 1$ extensae. *Nova Acta Acad. Petrop.* Bd. 5, pp. 86—117, 118—129; (1787) 1789.

22) Evolutio formulae integralis $\int \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{\log x}\right) dx$ a termino $x = 0$ usque ad $x = 1$ extensae. *Nova Acta Acad. Petrop.* Bd. 4, p. 3—16; (1786) 1789.

23) Variae considerationes circa series hypergeometricas. *Nova Acta Acad. Petropolitanae* Bd. 8, p. 3—14; 1794.

24) Plenior expositio serierum illarum memorabilium quae ex unciis potestatum binomii formantur. *Nova Acta Acad. Petrop.* Bd. 8, p. 32—68; 1794.

25) De vero valore hujus formulae integralis $\int \left(\log \frac{1}{x}\right)^{\omega} dx$ a termino $x = 0$ ad $x = 1$ extensae. *Nova Acta Acad. Petrop.* Bd. 8, p. 15—31; 1794.

26) in Opera posthuma Bd. I, p. 408—438; 1861. *Darboux Bulletin* (2) Bd. 4, p. 209—256; 1880.

Féaux, B.: 1) De functione quae littera Γ obsignatur sive de integrali Euleriano secundae speciei. Münster 1844.

2) Recherches d'analyse. *Programm.* Augsburg 1876.

Forsyth, A. R.: 1) On an approximate expression for $x!$ *Britt. Assoc. Rep.* 1883.

2) Evaluation of two definite integrals. *Quarterly Journal* Bd. 27, p. 216—225; 1895.

Fuß, N.: Gemina methodus investigandi valorem producti

$$\int \frac{x^{a-1}dx}{\sqrt[a]{(1-x^n)^b}} \cdot \int \frac{x^{a-1}dx}{\sqrt[a]{(1-x^n)^{\beta}}}$$

dum ambo integralia a termino $x = 0$ usque ad $x = 1$ extenduntur. *Acta Acad. Petropolitanae* 1778 II, p. 111—134; 1781.

de Gasparis, A.: Sul calculo de valore della funzione $\sum \frac{1}{\Gamma(x)}$. *Acc. di Napoli Rend.* Bd. 6; 1867. *Giorn. di mat.* Bd. 6, p. 16—23; 1868.

Gauß, C. F.: Disquisitiones generales circa seriem infinitam etc. *Comment. Gotting.* Bd. 2, p. 1—46; 1812. *Werke,* Bd. III. Deutsch von H. Simon; Berlin 1888.

Genocchi, A.: 1) Sulla formola sommatoria di Eulero, e sulla teoria de residui quadratici. *Annali di mat.* Bd. 3, p. 406—436; 1852.

2) Démonstration élémentaire d'une formule logarithmique de M. Binet. *Bull. de Bruxelles* Bd. 20, p. 392—397; 1853. *Annali di mat.* Bd. 5, p. 150—160; 1854.

3) Sur quelques particularités des formules d'analyse mathématique. *Bull. de Bruxelles* Bd. 21, p. 64—95; 1854.

4) Sur quelques développements de la fonction $\log \Gamma(x)$. *Bull. de Belgique* (2) Bd. 36, p. 546—565; 1873.

5) Réclamation de priorité au sujet de la série de Binet. *Bull. de Belgique* (2) Bd. 37, p. 351—352; 1874.

6) Éclaircissements sur une note relative à la fonction log $\Gamma(x)$. *Grunert Archiv* Bd. 61, p. 336—385; 1878.

7) Sur les fonctions de M. Prym et M. Hermite. *Bull. de Belgique* (3) Bd. 4; 1882.

8) Intorno alla funzione $\Gamma(x)$ ed alla serie dello Stirling che ne esprimere il logaritmo. *Mem. di Napoli* (3) Bd. 6.

Gilbert, Ph.: Recherches sur le développement de la fonction Γ et sur certaines intégrales définies qui en dépendent. *Mém. de Belgique* Bd. 41, p. 1—60; 1873.

Glaisher, J. W. L.: 1) Tafeln in *Messenger* (2) Bd. 1, p. 106—111 und in *Rep. British Association* 1871.

2) On the calculation of Eulers constant. *Royal Soc. London Proceedings* Bd. 19, p. 514—524; 1871.

3) On the history of Euler's constant. *Messenger* (2) Bd. 1, p. 25—32; 1872.

4) On the integrals $\int\limits_0^\infty \sin(x^n)\,dx$ and $\int\limits_0^\infty \cos(x^n)\,dx$. *Messenger* (2) Bd. 1, p. 106—111; 1872.

5) On the evaluation in series of certain definite integrales. *Rep. British Association* 1872.

6) Proof of Stirlings theorem $1\cdot 2\cdot 3\cdots n = \sqrt{2n\pi}\cdot n^n e^{-n}$. *Quarterly Journal* Bd. 15, p. 57—64; 1877.

7) On some definite integrals expressible in termes of the first complete elliptic integral and of gammafunctions. *London Math. Soc. Proceedings* Bd. 13, p. 92—99; 1881.

8) On certain integrals involving the exponential-integral. *Quarterly Journal* Bd. 18, p. 370—377; 1882.

9) Expressions for gamma functions in terms of complete elliptic integrals. *Messenger* (2) Bd. 24, p. 27—47; 1894.

Godefroy, M.: 1) Théorie élémentaire des séries. Paris 1900.

2) La fonction gamma. Paris 1901.

3) Sur les développements en séries entières de la théorie de la fonction gamma. *Annales de Marseille* Bd. 11, p. 117—124; 1901.

Graf, J. H.: 1) Über bestimmte Integrale. *Berner Naturf. Ges. Mitt.* 1884, p. 46—72.

2) Einleitung in die Theorie der Gammafunktion und der Eulerschen Integrale. Bern 1895.

Greathead: On general differentiation. *Cambridge Math. Journ.* Bd. 1, pp. 11—21, 109—117; 1839.

Grunert, J. A.: 1) Über die höheren Differentiale der Funktion $z = x:(x^2+y^2)$ und über die Entwicklung einiger bestimmten Integrale. *Journal für Math.* Bd. 8, p. 146—157; 1832.

2) Über die neuesten Erfindungen in der Theorie der bestimmten Integrale. *Grunert Archiv* Bd. 2, p. 266—323; 1842.

Gudermann, C.: Additamentum ad functionis $\Gamma(a)$ theoriam. *Journal für Math.* Bd. 29, p. 209—212; 1845.

Gyldén, H.: Sur l'intégrale Eulérienne de seconde espèce. *Comptes rendus* Bd. 92, pp. 897—901, 941—943; 1881.

Hankel, H.: Die Eulerschen Integrale bei unbeschränkter Variabilität des Arguments. *Diss.* Leipzig 1863. *Zeitschrift für Math. und Physik* Bd. 9, p. 1–21; 1864.

Hardy, C. H.: A new proof of Kummer's series for $\log \Gamma(a)$. *Messenger* (2) Bd. 31, p. 31—33; 1901.

Heine, E.: 1) Über einige bestimmte Integrale. *Journal für Math.* Bd. 61, p. 356—366; 1863.

2) Einige Anwendungen der Residuenrechnung von Cauchy. *Journal für Math.* Bd. 90, p. 19—40; 1880.

Hermite, Ch.: 1) Sur l'intégrale $\int\limits_0^1 \frac{z^{a-1} - z^{-a}}{1-z} dz$. *Atti di Torino* Bd. 14, p. 91—110; 1879.

2) Sur l'intégrale Eulérienne de seconde espèce. *Journal für Math.* Bd. 90, p. 332—338; 1881.

3) Sur une application du théorème de M. Mittag-Leffler dans la théorie des fonctions. *Acta Soc. Fennicae* Bd. 12.

4) Extrait d'une Lettre adressée à M. Mittag-Leffler. *Journal für Math.* Bd. 92, p. 145—155; 1882.

5) Cours à la Faculté des Sciences des Paris (lithografiés). (2. Aufl.) Paris 1883.

6) Sur une extension de la formule de Stirling. *Math. Annalen* Bd. 41, p. 581—590; 1893.

7) Sur la fonction Eulérienne. (Extrait d'une Lettre adressée à M. Ed. Weyr) *Časopis* Bd. 23, p. 65; 1894.

8) Sur la fonction $\log \Gamma(a)$. *Journal für Math.* Bd. 105, p. 201—208; 1895.

9) Extrait d'une Lettre adressée à M. Craig. *American Journal* Bd. 17, p. 6—10; 1895.

10) Sur le logarithme de la fonction gamma. *American Journal* Bd. 17, p. 111—116; 1895.

11) Extrait d'une Lettre. *Bull. de l'Acad. de François-Joseph* 1895, p. 5—6.

12) Extrait de quelques Lettres adressées à M. Pincherle. *Annali di Mat.* (3) Bd. 5, p. 57—72; 1900.

Hermite und Sonin s. Sonin und Hermite.

Hočevar, F.: Über die unvollständige Gammafunktion. *Zeitschrift für Math. und Physik* Bd. 21, p. 449—450; 1876.

Hoesch: Untersuchungen über die Π-Funktion von Gauß und verwandte Funktionen. *Diss.* Göttingen 1879.

Hölder, O.: Über die Eigenschaft der Gammafunktion keiner algebraischen Differentialgleichung zu genügen. *Math. Annalen* Bd. 28, p. 1—13; 1886.

Hoppe, R.: Remarques sur la réduction de la fonction gamma, et sur la définition de cette fonction et des facultés analytiques par leurs propriétés. *Journal für Math.* Bd. 40, p. 152—159; 1850.

2) Beweis für einen Satz von dem Eulerschen Integral. *Grunert Archiv* Bd. 41, p. 65—67; 1863.

Jacobi, C. G. J.: Demonstratio formulae

$$\int\limits_0^1 \omega^{a-1}(1-\omega)^{b-1} d\omega = \Gamma(a) \cdot \Gamma(b) : \Gamma(a+b).$$

Journal für Math. Bd. 11, p. 307; 1834.

Jeffery, H. M.: On the derivatives of the gamma function. *Quarterly Journal* Bd. 6, p. 82—108; 1864.

Jensen, J. L. W. V.: Gammafunktionens Theori i elementær Fremstilling. *Nyt Tidsskrift for Math.* Bd. 2 B, pp. 33—72, 83—85; 1891.

Jörgensen, N. R.: Et Integraludtryk for $1 : \Gamma(\mu)$. *Nyt Tidsskrift for Math.* Bd. 11 B, p. 34—40; 1900.

Kinkelin, H.: Die Fundamentalgleichung der Funktion $\Gamma(x)$. *Berner Naturf. Ges. Mitt.* 1857, p. 1—11.

Kluyver, J. C.: 1) Over de ontwikkeling van eene functie in eene faculteitenreeks. *Nieuw Arch.* (2) Bd. 4, p. 74—82; 1899.

2) Sur les séries de factorielles. *Comptes rendus* Bd. 134. p. 587—588; 1902.

Knar, J.: Die harmonischen Reihen. *Grunert Archiv* Bd. 41, p. 297—452; 1864. Bd. 42, p. 134—210; 1865.

Kramp: Analyse des réfractions astronomiques et terrestres. Straßburg 1799.

Kummel, C. H.: On the gamma function. *Analyst* Bd. 4, pp. 156—157, 182—183; 1877.

Kummer, E. E.: 1) Über die hypergeometrische Reihe. *Journal für Math.* Bd. 15, p. 39—83; 1836.

2) De integralibus definitis et seriebus infinitis. *Journal für Math.* Bd. 17, p. 210—227; 1837.

3) De integralibus quibusdam definitis et seriebus infinitis. *Journal für Math.* Bd. 17, p. 228—242; 1837.

4) Beitrag zur Theorie der Funktion $\Gamma(x)$. *Journal für Math.* Bd. 35, p. 1—4; 1847.

Landau, E.: Zur Theorie der Gammafunktion. *Journal für Math.* Bd. 123, p. 276—283; 1901.

Landsberg, G.: Sur un nouveau développement de la fonction gamma qui contient la série de Stirling et celle de Kummer. *Mém. Couronnés de Belgique* Bd. 55, 25 S. 1897.

de **Laplace**, P. S.: Théorie analytique des Probabilités. Paris 1814 (2. Aufl.).

Lebesgue, V. A.: Sur l'intégrale $\int_0^1 \frac{1-\varphi^\alpha}{1-\varphi}\,d\varphi = \sum_{s=1}^{s=\infty}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{\alpha+s}\right)$, où $\alpha < 1$. *Journal de Math.* (2) Bd. 1. p. 377—378; 1856.

Legendre, A. M.: 1) Mémoires sur les transcendantes elliptiques. Paris 1794.

2) Recherches sur diverses sortes d'intégrales définies. *Mém. de l'Institut* Bd. 10, p. 416—509; 1809.

3) Exercices de calcul intégral. Paris 1811—1819.

4) Traité des fonctions elliptiques et des intégrales Eulériennes. Paris 1825—1828.

Lejeune-Dirichlet, P. G.: 1) Note sur les intégrales définies. *Journal für Math.* Bd. 4, p. 94—98; 1829. *Werke* Bd. I, p. 109—116.

2) Sur les intégrales Eulériennes. *Journal für Math.* Bd. 15, p. 258—263; 1836. *Werke* Bd. I, p. 271—278.

3) Sur une nouvelle méthode pour la détermination des intégrales multiples. *Comptes rendus* Bd. 8, p. 156—160. *Journal de Math.* Bd. 4, p. 164—168 1839. *Werke* Bd. I, p. 375—380.

4) Über eine neue Methode zur Bestimmung vielfacher Integrale. *Berichte der Berliner Akademie* 1839, p. 18—25, *Abhandl. der Berliner Akad.* 1839, p. 61—79. *Werke* Bd. I, pp. 381—390, 391—410.

5) Vorlesungen über bestimmte Integrale. Herausgegeben von G. Arndt. Braunschweig 1904. Man vergleiche auch G. F. Meyer, Vorlesungen über bestimmte Integrale. Leipzig 1871.

Lerch, M.: 1) Démonstration nouvelle de la propriété fondamentale de l'intégrale Eulérienne de première espèce. *Bull. Soc. Math. de France* Bd. 15, p. 173—178; 1887.

2) Démonstration élémentaire de la formule de Raabe. *Giorn. di mat.* Bd. 26, p. 39—40; 1888.

3) Über die Fundamentaleigenschaften der Eulerschen Integrale. *Prager Berichte* 1889 (böhmisch).

4) Aus der Integralrechnung. *Monatshefte für Math. u. Physik* Bd. 1, p. 105—112; 1890.

5) Studien auf dem Gebiete der Malmsténschen Reihen und der Invarianten quadratischer Formen. *Rozpravy* Bd. 2, Nr. 4, 12 S. 1893 (böhmisch).

6) Sur un point concernant la théorie de la fonction gamma. *Prager Berichte* 1893, 8 S.

7) Sur une intégrale définie. *Giorn. di mat.* Bd. 31, p. 171—172; 1893.

8) Sur la différentiation des séries trigonométriques. *Comptes rendus* Bd. 119, p. 725—728; 1894.

9) Weitere Studien auf dem Gebiete der Malmsténschen Reihen. Mit einem Briefe des Herrn Hermite. *Rozpravy* Bd. 3, Nr. 28, 63 S. 1874 (böhmisch).

10) Über das Integral von Binet. *Casopis* Bd. 23; 1894 (böhmisch).

11) Sur une relation ayant rapport avec la théorie de la fonction gamma. *Bull. de l'Acad. François-Joseph* Bd. 1, p. 1—4; 1895.

12) Logarithmus der Faktorielle $n!$ *Casopis* Bd. 24, p. 129—132; 1895 (böhmisch).

13) Sur la différentiation d'une classe de séries trigonométriques. *Annales de l'École Normale* (3) Bd. 12, p. 351—361; 1895.

14) Verschiedenes über die Gammafunktion. *Rozpravy* Bd. 5, Nr. 14, 37 S.; 1896 (böhmisch).

15) Sur la transformation Abélienne des séries trigonométriques. *Bull. de l'Acad. François-Joseph* 1896, 4 S.

16) Über eine Formel aus der Theorie der Gammafunktion. *Monatshefte für Math. u. Physik* Bd. 8, p. 189—192; 1897.

17) Expression nouvelle de la constante d'Euler. *Prager Berichte* Bd. 42; 1897.

18) Remarque élémentaire sur la constante d'Euler. *Teixeira Jonrnal* Bd. 13, p. 129—133; 1897.

19) Formule pour le calcul rapide d'un certain potentiel. *Journal de Math.* (5) Bd. 5, p. 422—433; 1899.

20) Bemerkungen über einige bestimmte Integrale aus der Theorie der Gammafunktion. *Rozpravy* Bd. 7, Nr. 37, 5 S. 1899.

21) Theorie der Gammafunktion. *Vestnik* 1899, 17 S.

22) Sur quelques propriétés d'une transcendante uniforme. Freiburg 1898, 12 S. *Prace mat. fiz.* Bd. 10, p. 1—7; 1899.

23) Bemerkungen über die Gaußschen Gleichungen in der Theorie der Gammafunktion. *Prace mat. fiz.* Bd. 10, p. 269—270; 1899.
24) Schnell konvergierende Darstellung gewisser Grenzwerte. *Rozpravy* Bd. 8, Nr. 36, 9 S. 1900.
25) Einige Reihenentwicklungen der unvollständigen Gammafunktion. *Journal für Math.* Bd. 130, p. 47—65; 1905.

Liebrecht, E.: Über einige bestimmte Integrale. *Grunert Archiv* Bd. 59, p. 218—224; 1876.

Limbourg, H.: 1) Théorie de la fonction gamma. Gent 1859.
2) Sur un point de la théorie de la formule de Stirling. *Mém. de Bruxelles* Bd. 30, 21 S.; 1860.

Lindhagen, A.: 1) Om några formler i gammafunktionens teori. *Öfversigter der Stockholmer Akademie* 1883, Nr. 2, p. 27—29.
2) Studier öfver Gammafunktionen. *Diss.* Stockholm 1887.

Lindman, C. F.: 1) Om några definita integraler. *Handlingar der Stockholmer Akademie* 1850 II, p. 343—363.
2) De integralibus quibusdam definitis. *Grunert Archiv* Bd. 16, p. 99—103; 1851.
3) De vero valore constantis quae in logarithmo integrali occurrit. *Grunert Archiv* Bd. 29, p. 238—240; 1857.

Lindner, J.: Über Tiefgrößen mit gebrochenem Index. *Hoppe Archiv* Bd. 70, p. 96—105; 1883.

Liouville, J.: 1) Mémoire sur l'usage que l'on peut faire de la formule de Fourier dans le calcul des différentielles à indices quelconques. *Journal für Math.* Bd. 13, p. 219—232; 1835.
2) Note sur quelques intégrales définies. *Journal de Math.* Bd. 4, p. 225—235; 1839.
3) Note sur l'évaluation approchée du produit $x!$ *Comptes rendus* Bd. 39, p. 105—108. *Journal de Math.* Bd. 4, p. 317—322; 1839.
4) Sur l'intégrale $\int\limits_0^\infty e^{-x} x^n\, dx$. *Journal de Math.* Bd. 11, p. 464—465; 1846.
5) Note sur la fonction gamma de Legendre. *Comptes rendus* Bd. 35, p. 317—322. *Journal de Math.* Bd. 17, p. 448—453; 1852.
6) Valeur d'une intégrale définie qui se rattache aux intégrales trinômes. *Journal de Math.* Bd. 20, p. 133—134; 1855.
7) Sur un théorème relatif à l'intégrale Eulérienne de seconde espèce. *Journal de Math.* Bd. 20, p. 157—160; 1855.
8) Sur l'équation $\Gamma(t)\Gamma\left(t+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2t}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2t)$. *Journal de Math.* Bd. 20, p. 161—163; 1855.
9) Détermination des valeurs d'une classe remarquable d'intégrales définies et démonstration d'une célèbre formule de Gauß, concernant la fonction gamma de Legendre. *Comptes rendus* Bd. 42, p. 500—508. *Journal de Math.* (2) Bd. 1, p. 82—88; 1856.
10) Sur l'intégrale $\int\limits_0^1 \frac{t^{\mu+\frac{1}{2}}(1-t)^{\mu-\frac{1}{2}}}{(a+bt-ct^2)^{\mu+1}}\, dt$. *Journal de Math.* (2) Bd. 1,

p. 421—424; 1856. Gegenbemerkungen von Cayley und Schlömilch im nächsten Bande p. 47—55; 1857.

11) Démonstration nouvelle d'une formule de M. Thomson. *Journal de Math.* (2) Bd. 1, p. 445; 1856.

12) Sur l'intégrale définie $\int_0^1 \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1+\sqrt{xy})^{sp+rq}}\,dx$. *Journal de Math.* (2) Bd. 2, p. 279; 1857.

13) Sur une intégrale définie multiple. *Journal de Math.* (2) Bd. 4, p. 155—160; 1859.

Lipschitz, R.: 1) Über die Darstellung gewisser Funktionen durch die Eulersche Summenformel. *Journal für Math.* Bd. 56, p. 11—26; 1859.

2) Sur l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos x)^{a-b}\cos(a+b)x\,dx$. *Darboux Bulletin* (2) Bd. 5, p. 387—388; 1881.

Lobatscheffsky, N. J.: In *Kasaner Memoiren* 1835 und 1836.

de Longchamps, G.: Sur les intégrales Eulériennes de seconde espèce. *Annales de l'École Normale* (2) Bd. 9, p. 419—427; 1880.

Mainardi: Sulla integrazione della formola $F:(E\sqrt[3]{\psi})$ essendo F, E, ψ funzione intere di una medesima variabile. *Mem. Istituto Veneto* Bd. 2, p. 401—425; 1845.

Malmstén, C. J.: 1) Sur la formule

$$hu'_x = \Delta u_x - \frac{h}{2}\Delta u'_x + \frac{B_1 h^2}{2!}u''_x - \frac{B_2 h^4}{4!}u^{(4)}_x + \cdots.$$

Journal für Math. Bd. 35, p. 55—82; 1847. *Acta Mathematica* Bd. 5, p. 1—46; 1884.

2) De integralibus definitis seriebusque infinitis. *Journal für Math.* Bd. 38, p. 1—39; 1849.

Mansion, P.: 1) Démonstration élémentaire de la formule de Stirling. *Nouv. Corresp. Math.* Bd. 5, pp. 44—51, 51—53; 1879.

2) Sur la série harmonique et la formule de Stirling. *Mathesis* Bd. 1, p. 169—172; 1882.

3) Sur la fonction gamma. *Annales de la Soc. scient. Bruxelles* Bd. 17, p. 4—8; 1893.

Mascheroni: Adnotationes ad calculum integralem Euleri. 1790.

Matthiessen, L.: 1) Zur Theorie der bestimmten Integrale und der Gammafunktion. *Zeitschrift für Math. u. Physik* Bd. 12, p. 302—321; 1867.

2) Sopra alcune proprietà degl' integrali euleriani di prima e seconda specie. *Annali di Mat.* (2) Bd. 2, p. 21—27; 1868.

Mellin, H.; 1) Om gammafunktionen. *Öfversigter der Stockholmer Akademie* 1883, Nr. 5, p. 3—20.

2) Über die transzendente Funktion $Q(x) = \Gamma(x) - P(x)$. (Aus einem Briefe an Herrn G. Mittag-Leffler). *Acta Mathematica* Bd. 2, p. 231—232; 1883.

3) Eine Verallgemeinerung der Gleichung $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \pi : \sin \pi x$. *Acta Mathematica* Bd. 3, p. 102—104; 1883.

4) Über gewisse durch die Gammafunktion ausdrückbare Produkte. *Acta Mathematica* Bd. 3, p. 322—324; 1883.

5) Om ett slag af oändlige produkter, hvilka kunna bestämmas gennom gammafunktionen. *Öfversigter der Helsingforser Akademie* Bd. 26, p. 170—176; 1884.

6) Zur Theorie der Gammafunktion. *Acta Mathematica* Bd. 8, p. 37—80; 1886.

7) Über einen Zusammenhang zwischen gewissen linearen Differential- und Differenzengleichungen. *Acta Mathematica* Bd. 9, p. 137—166; 1887.

8) Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen erster Ordnung. *Acta Mathematica* Bd. 15, p. 317—384; 1891.

9) Über die fundamentale Wichtigkeit des Satzes von Cauchy für die Theorien der Gamma- und hypergeometrischen Funktionen. *Acta Soc. Fennicae* Bd. 21, 115 S.; 1896.

10) Über hypergeometrische Reihen höherer Ordnung. *Acta Soc. Fennicae* Bd. 23, 10 S.; 1897.

11) Über eine Verallgemeinerung der Riemannschen Funktion $\zeta(s)$. *Acta Soc. Fennicae* Bd. 24, 50 S.; 1899.

12) Eine Formel für den Logarithmus transzendenter Funktionen von endlichem Geschlecht. *Acta Soc. Fennicae* Bd. 24, 49 S.; 1900. *Acta Mathematica* Bd. 25, p. 165—184; 1902.

13) Über den Zusammenhang zwischen den linearen Differential- und Differenzengleichungen. *Acta Mathematica* Bd. 25, p. 139—164; 1902.

Meyer, A.: Exposé élémentaire de la théorie des intégrales définies. *Mém. de Liège* Bd. 7, p. 1—510; 1852.

Meyer, G. F.: 1) Summation reziproker Potenzreihen mittels der Formel

$$s^{-a} = \frac{1}{\Gamma(a)} \cdot \int_0^\infty e^{-sx} x^{a-1} dx.$$ *Grunert Archiv* Bd. 41, p. 220—231; 1867.

2) Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale zwischen reellen Grenzen. Leipzig 1871.

Newman: On $\Gamma(a)$ especially when a is negativ. *Cambridge and Dublin math. Journal* Bd. 3, p. 57—60; 1848.

Nielsen, N.: 1) Et Dobbeltintegral. *Nyt Tidsskrift for Math.* Bd. 4 B, p. 81—82; 1893.

2) Om en Klasse bestemte Integraler og nogle derved definerede semiperiodiske Funktioner. *Diss.* Kopenhagen 1895.

3) En Räkke for Eulers Konstant. *Nyt Tidsskrift for Math.* Bd. 8 B, p. 10—12; 1897.

4) Théorème sur les intégrales $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\log \sin 2\varphi)^p d\varphi$ et $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} \varphi (\log \sin \varphi)^p d\varphi$. *Oversigter der Kopenhagener Akademie* 1897, p. 197—206.

5) Sur les séries de factorielles. *Comptes rendus*, 30. Dez. 1901, 20. Jan. 1902.

6) Recherches sur les séries de factorielles. *Annales de l'École Normale* (3) Bd. 19, p. 409—453; 1902.

7) Note sur la fonction gamma. *Le Matematiche* Bd. 2, p. 249—253 1902.

8) Sur la fonction gamma. *Arch. der Math. u. Physik* (3) Bd. 6, p. 223—231; 1903.

9) Recherches sur le carré de la dérivée logarithmique de la fonction gamma et sur quelques fonctions analogues. *Annali di Mat.* (3) Bd. 9. p. 189—210; 1903.

10) Note sur quelques séries de puissances trouvées dans la théorie de la fonction gamma. *Annali di Mat.* (3) Bd. 9, p. 211—218; 1903.

11) Évaluation nouvelle des formules de Binet, Gudermann et Raabe concernant la fonction gamma. *Annali di Mat.* (3) Bd. 9, p. 237—245; 1903.

12) Sur la multiplication de deux séries de factorielles. *Accad. dei Lincei Roma Rendiconti,* 17. Jan. 1904.

13) Sur une intégrale définie. *Math. Annalen* Bd. 59, p. 89—102; 1904.

14) Les séries de factorielles et les opérations fondamentales. *Math. Annalen* Bd. 59, p. 355—376; 1904.

15) Recherches sur une classe de fonctions méromorphes. *Afhandlinger der Kopenhagener Akademie* 1904, 46 S.

16) Elementare Herleitung einiger Formeln aus der Theorie der Gammafunktion. *Monatshefte für Math. u. Physik* Bd. 15, p. 315—324; 1904.

17) Notas sobre la funciòn beta. *Revista trimestral de mat.* Bd. 4, p. 150—156; 1904.

18) Séries asymptotiques obtenues pour une série de factorielles. *Annales de l'École Normale* (3) Bd. 21, p. 449—458; 1904.

19) Sur la multiplication de deux séries de coefficients binomiaux. *Accad. dei Lincei Roma Rend.*, 4. Dez. 1904.

20) Sur quelques applications intégrales des séries de coefficients binomiaux. (Extrait d'une Lettre adressée à M. S. Pincherle). *Circolo mat. Palermo Rend.* Bd. 19, p. 129—139; 1905.

21) Über die Stirlingschen Polynome und die Gammafunktion. *Monatshefte für Math. u. Physik* Bd. 16, p. 135—140; 1905.

Oettinger: 1) Über die richtige Wertbestimmung der Konstante des Integrallogarithmus. *Journal für Math.* Bd. 60, p. 375—377; 1862.

2) Über ein bestimmtes Integral. *Journal für Math.* Bd. 63, p. 252—254; 1864.

Ohm: 1) Über das Verhalten der Gammafunktion zu den Produkten äquidistanter Faktoren. *Journal für Math.* Bd. 36, p. 277—295; 1848.

2) Über die Behandlung der Lehre der reellen Faktoriellen und Fakultäten nach einer Methode der Einschließung in Grenzen. *Journal für Math.* Bd. 39, p. 23—41; 1850.

Pincherle, S.: 1) Sulle funzioni ipergeometriche generalizzate. *Accad. dei Lincei Roma Rend.* (4) Bd. 4, pp. 694—700, 792—799; 1888.

2) Una trasformazione dei serie. *Circolo mat. Palermo Rend.* Bd. 2, p. 215—226; 1889.

3) Sopra un problema d' interpolazione. *Circolo mat. Palermo Rend.* Bd. 14, p. 1—3; 1899.

4) Sulle serie di fattoriali. *Accad. dei Lincei Roma Rendiconti* 1902, pp. 139—144, 417—426.

5) Sulla sviluppabilità di una funzione in serie di fattoriali. *Accad. dei Lincei Roma Rend.* 1903, p. 336—343.

6) Sugli sviluppi assintotici e le serie sommabili. *Accad. dei Lincei Roma Rend.* 15. Mai 1904.

7) Sur les fonctions déterminantes. *Annales de l'École Normale* (3) Bd. 22, p. 9—68; 1905.

Plana, J.: 1) in *Turiner Memoiren* Bd. 24; 1820.

2) Recherches analytiques sur les expressions du rapport de la circonférence au diamètre trouvées par Wallis et Brouncker. *Journal für Math.* Bd. 17, pp. 1—34, 163—202; 1837.

Pochhammer, L.: 1) Zur Theorie der Eulerschen Integrale. *Math. Annalen* Bd. 35, p. 495—526; 1890.

2) Über ein vielfaches, auf Eulersche Integrale reduzierbares Integral. *Journal für Math.* Bd. 107, p. 246—250; 1891.

3) Bemerkung über das Integral $\overline{\Gamma}(a)$. *Math. Annalen* Bd. 41, p. 157—166; 1892.

Poisson, S. D.: 1) Mémoire sur les intégrales définies. *Journal de l'École Polytechn.* cahier 16, p. 215—246; 1813, cahier 18, p. 295—340; 1820, cahier 19, p. 404—509; 1823.

2) Second mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs. *Mém. de l'Institut* 1811, pp. 1—92, 163—274.

Pringsheim, A.: Zur Theorie der Gammafunktion. *Math. Annalen* Bd. 31, p. 455—481; 1888.

Prym, F. E.: Zur Theorie der Gammafunktion. *Journal für Math.* Bd. 82, p. 165—172; 1876.

Raabe, J.: 1) Angenäherte Bestimmung der Faktorenfolge $n!$, wenn n eine sehr große ganze Zahl ist. *Journal für Math.* Bd. 25, p. 147—159; 1843. Bd. 28, p. 10—18; 1844.

2) Reduktion eines p-fachen Integralausdruckes auf ein einfaches. *Journal für Math.* Bd. 28, p. 19—27; 1844.

3) Wertung der Faktorielle $\binom{m}{k}$. *Journal für Math.* Bd. 48, p. 130—136; 1854.

4) Über einen Hilfssatz zur Ausmittelung der Werte bestimmter Integrale. *Journal für Math.* Bd. 48, p. 160—166; 1854.

Rajewsky, J.: Über einige bestimmte Integrale. *Krakauer Berichte* Bd. 20, p. 272—281; 1891. (polnisch.)

Ramus, C.: Om Ellipsoiders Tiltrækning og om de ellipsoidiske Ligevægtsfigurer af flydende Masser. *Oversigter der Kopenhagener Akademie* 1844, p. 48—58. *Afhandlinger der Kopenh. Akad.* (4) Bd. 12, p. 111—184; (1846).

Realis: Esercizio elementare sugl' integrali euleriani della prima specie. *Giorn. di mat.* Bd. 9, p. 345—354; 1871.

Rogel, F.: Theorie der Eulerschen Funktionen. *Prager Berichte* 1896; 45 S.

Rouché, E.: Sur la formule de Stirling. *Comptes rendus* Bd. 110, p. 513—515; 1890.

Saalschütz, L.: 1) Bemerkungen über die Gammafunktionen mit negativem Argument. *Zeitschrift für Math. u. Physik* Bd. 32, p. 246—250; 1887. Bd. 33, p. 362—371; 1888.

2) Über einen Spezialfall der hypergeometrischen Reihe dritter Ordnung. *Zeitschrift für Math. u. Physik* Bd. 36. p. 278—295; 1891.

Schaar: Mémoire sur les intégrales Eulériennes et sur la convergence d'une certaine classe de séries. *Mém. Couronnés Bruxelles* Bd. 22; 1846, 25 S.

Scheefer, L.: Zur Theorie der Funktionen $\Gamma(z)$, $P(z)$ und $Q(z)$. *Journal für Math.* Bd. 97, p. 230—242; 1884.

Scheibner, W.: 1) Über die asymptotischen Werte der Koeffizienten in den nach der mittleren Anomalie vorgenommenen Entwicklungen. *Leipziger Berichte* Bd. 8, p. 40—64; 1856.

2) Über periodische Funktionen. *Leipziger Berichte* Bd. 14, p. 64—135; 1862.

Schenkel, H.: Kritisch-historische Untersuchung über die Theorie der Gammafunktion und der Eulerschen Integrale. *Diss.* Bern 1894.

Schläfli, L.: Über die zwei Heineschen Kugelfunktionen mit beliebigem Parameter und ihre ausnahmslose Darstellung durch bestimmte Integrale. (Anhang). Bern 1881.

Schlömilch, O.: 1) Beiträge zur Theorie bestimmter Integrale. Jena 1843.

2) Einiges über die Eulerschen Integrale der zweiten Art. *Grunert Archiv* Bd. 4, p. 167—174; 1844.

3) Über einige Integrale, welche goniometrische Funktionen involvieren. *Grunert Archiv* Bd. 6, p. 200—205; 1845.

4) Ein Paar allgemeine Eigenschaften der Eulerschen Integrale der zweiten Art. *Grunert Archiv* Bd. 6, p. 213—222; 1845.

5) Note sur la variation des constantes arbitraires d'une intégrale définie. *Journal für Math.* Bd. 33, p. 268—280; 1846.

6) Développements de quelques intégrales définies renfermant des fonctions trigonométriques. *Journal für Math.* Bd. 33, p. 353—361; 1846.

7) Über Legendres Theorem von dem Eulerschen Integral zweiter Art. *Grunert Archiv* Bd. 7, p. 348—353; 1846.

8) Bemerkung zur Theorie des Integrallogarithmus. *Grunert Archiv* Bd. 9 p. 5—8; 1847.

9) Analytische Studien. Leipzig 1848.

10) Über ein Paar Doppelintegrale. *Grunert Archiv* Bd. 11, p. 174—180; 1848.

11) Über eine transzendente Gleichung, welcher keine komplexe Zahl genügt. *Grunert Archiv* Bd. 12, p. 293—297; 1848. Gegenbemerkung von Th. Claussen in *Grunert Archiv* Bd. 13, p. 334—336; 1849.

12) Zur Theorie der Gammafunktion. *Zeitschrift für Math. u. Physik* Bd. 1, p. 118—119; 1856.

13) Notiz über die Entwicklung des Integrals $\int_0^1 \frac{t^{\mu+\frac{1}{2}}(1-t)^{\mu-\frac{1}{2}}}{(a+bt-ct^2)^{\mu+1}}dt$. *Zeitschrift für Math. u. Physik* Bd. 2, p. 67—68; 1857. *Journal de Math.* (2) Bd. 2, p. 47—55; 1857.

14) Réduction d'une intégrale multiple, *Journal de Math.* (2) Bd. 2, p. 206—218; 1857.

15) Über eine Eigenschaft gewisser Reihen. *Zeitschrift für Math. u. Physik* Bd. 3, p. 130—133; 1858.

16) Über Fakultätenreihen. *Leipziger Berichte* Bd. 11, p. 109—137; 1859. *Zeitschrift für Math. u. Physik* Bd. 4, p. 390—415; 1859.

17) Entwicklung einer neuen Reihe für die Gammafunktion. *Zeitschrift für Math. u. Physik* Bd. 4, p. 431—434; 1859.

18) Über einige Integralformeln. *Zeitschrift für Math. u. Physik* Bd. 6, p. 205—209; 1861. Bd. 7, p. 262—264; 1862.

19) Über die Entwicklung von Funktionen komplexer Variabeln in Fakultätenreihen. *Leipziger Berichte* Bd. 15, p. 58—62; 1863.

20) Über ein Paar durch Gammafunktionen ausdrückbare Integrale. *Zeitschrift für Math. u. Physik* Bd. 9, p. 356; 1864.

21) Über die näherungsweise Berechnung der Permutationszahlen. *Zeitschrift für Math. u. Physik* Bd. 10, p. 232—236; 1865.

22) Über eine Kettenbruchentwicklung für unvollständige Gammafunktionen. *Zeitschrift für Math. u. Physik* Bd. 16, p. 261—262; 1871.

23) Einige Bemerkungen über den reziproken Wert der Gammafunktion. *Zeitschrift für Math. u. Physik* Bd. 25, p. 103—106; 1880.

24) Über den verallgemeinerten Taylorschen Satz. *Leipziger Berichte* Bd. 31, p. 27—33; 1879; *Zeitschrift für Math. u. Physik* Bd. 25, p. 48—53; 1880.

25) Über den Quotienten zweier Gammafunktionen. *Zeitschrift für Math. u. Physik* Bd. 25, p. 351—352; 1880.

26) Kompendium der höheren Analysis. Bd. II. Braunschweig, Vieweg & Sohn.

Schmit: Intégrales définies. *Liège Mém.* Bd. 13, p. 289—327; 1858.

Schobloch, J. A.: Über Beta- und Gammafunktionen. Halle 1884.

Serret, J. A. (Alfred): 1) Note sur les intégrales Eulériennes de seconde espèce. *Journal de Math.* Bd. 7, p. 114—119; 1842.

2) Note sur quelques formules de calcul intégral. *Journal de Math.* Bd. 8, p. 1—22; 1843.

3) Sur quelques formules relatives à la théorie des intégrales Eulériennes. *Journal de Math.* Bd. 8, p. 489—494; 1843.

4) Sur l'évaluation approchée du produit $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots x$ lorsque x est un très-grand nombre et sur la formule de Stirling. *Comptes rendus* Bd. 50, p. 662—666; 1860.

Shanks: On the calculation of the numerical value of Euler's constant. *Proceedings of the Royal Soc. of London* Bd. 15, p. 429—431; 1867. Bd. 16, pp. 154, 299—300; 1867—1868. Bd. 18, p. 49; 1869. Bd. 20, p. 27—34; 1872.

Sharpe, H. J.: On the gamma function of a complexe variable. *Messenger* (2) Bd. 13, p. 111—112; 1883.

de Sonin, N. J.: 1) Note sur une formule de Gauß. *Bull. Soc. Math. de France* Bd. 9, p. 162—166; 1881.

2) Bernoullische Polynome und ihre Anwendungen. *Warschauer Univ.-Nachr.* 1888 (russisch).

3) Die Darstellung des Logarithmus und der Eulerschen Konstante durch bestimmte Integrale. *Warschauer Univ.-Nachr.* 1889 (russisch).

4) Über die kontinuierliche Funktion $[x]$ und ihre Anwendungen. *Warschauer Univ.-Nachr.* 1889 (russisch).

5) Sur les termes complémentaires de la formule sommatoire d'Euler et de celle de Stirling. *Comptes rendus* Bd. 108, p. 725—727; 1889. *Annales de l'École Normale* (3) Bd. 6, p. 257—262; 1889.

Sonin und Hermite: Sur les polynômes de Bernoulli. *Journal für Math.* Bd. 106, p. 133—156; 1896.

Stadigh, V.: Ein Satz über Funktionen, die algebraische Differentialgleichungen befriedigen. *Diss.* Helsingfors 1902.

Stekloff, W. A.: Interpolation einiger Produkte. *Charkow Ges.* (2) Bd. 1, p. 239—248; 1890 (russisch).

Stern, M. A.: 1) Remarques sur les intégrales Eulériennes. *Journal für Math.* Bd. 21, p. 377—379; 1840.

2) Zur Theorie der Eulerschen Integrale. *Göttinger Studien* 1847.

3) Beweis eines Satzes von Legendre. *Journal für Math.* Bd. 67, p. 114—129; 1867.

Stieltjes, T. J.: 1) En enander over de integral $\int_0^1 \log \Gamma(x+u)\,du$. *Nieuw Arch.* Bd. 2, p. 100—104; 1878.

2) Recherches sur quelques séries semi-convergentes. *Annales de l'École Normale* (3) Bd. 3, p. 201—258; 1886.

3) Table des valeurs des sommes $\sum_{s=1}^{s=\infty} s^{-k}$. *Acta Mathematica* Bd. 10, p. 299—302; 1887.

4) Sur le développement de $\log \Gamma(a)$. *Journal de Math.* (4) Bd. 5, p. 425—444; 1889.

Stirling, J.: Methodus differentialis sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum. London 1730.

Sturm, C.: Deux théorèmes. *Annales de Gergonne* Bd. 14, p. 17—23; 1824.

Sylvester, J. J.: Note on certain definite integrals. *Quarterly Journal* Bd. 4, p. 319—324; 1861.

Tannery, J.: Sur les intégrales Eulériennes. *Comptes rendus* Bd. 94, p. 1698—1701. Bd. 95, p. 75; 1882.

Teixeira, F. G.: 1) Extrait d'une Lettre à M. Rouché. *Nouvelles Annales* (3) Bd. 10, p. 312—317; 1891.

2) Sobre representação da função $\log \Gamma(x)$ por an integral definido. *Progreso mat.* Bd. 1, p. 185—187; 1891.

de Tilly, A.: 1) Note sur la formule qui donne, en série convergente, la somme des logarithmes hyperboliques des $x-1$ premiers nombres entiers. *Bull. de Belgique* (2) Bd. 35, p. 30—40; 1873.

2) Sur la généralisation de la formule de Binet. *Bull. de Belgique* (2) Bd. 38, p. 67—70; 1874.

Tschebytscheff, P.: Note sur une classe d'intégrales définies multiples. *Journal de Math.* Bd. 8, p. 235—238; 1843.

Walton: On interpolation with reference to developpement and differentiation. *Quarterly Journal* Bd. 7, p. 212; 1866. Bd. 8, p. 52—65; 1867.

Weddle: On the function $\Gamma(x+1)$. *Mathem.* Bd. 1, p. 143—146; 1845.

Weierstraß, K.: Über die Theorie der analytischen Fakultäten. *Journal für Math.* Bd. 51, p. 1—60; 1856. *Abhandlungen aus der Funktionenlehre* p. 181—262. *Werke* Bd. I, p. 153—211.

Weyr, E.: 1) Über die Summation gewisser unendlicher Reihen. *Časopis* Bd. 21, p. 161—180; 1892 (böhmisch).

2) Über Auswertung von unendlichen Faktorenfolgen mit Hilfe von Γ. *Časopis* Bd. 22; 1893 (böhmisch).

Zehfuß, G.: Einfache Herleitung der Gaußschen Ausdrücke für $\Gamma(x)$. *Grunert Archiv* Bd. 30, p. 441; 1858. *Nouvelles Annales* Bd. 18; 1859.

Zinin, N.: Die Funktion Γ und die Funktion $\mathfrak{Q}$. *Warschauer Univ.-Nachr.* 1884 (russisch).

B. Physikalische Anwendungen.

Blaserna, P.: Sul problema ottico degli anfiteatri. *Accad. dei Lincei Roma Rend.* (5) Bd. 4, p. 271—283; 1895.

Hicks, W. M.: On the motion of two cylinders in a fluid. *Rep. British. Assoc.* 1878.

Jude, R. H.: Note on the application of the gamma function to an electrostatical problem. *Phil. Magazine* (5) Bd. 46, p. 254—258; 1898.

Kirchhoff, G.: Über die Verbreitung der Elektrizität auf zwei leitenden Kugeln. *Journal für Math.* Bd. 59, p. 89—110; 1861.

C. Verallgemeinerungen und Analogien.

Alexejeffsky, W.: 1) Über die Funktionen, welche den Gammafunktionen ähnlich sind. *Charkow Ges.* (2) Bd. 1, p. 169—238; 1890 (russisch).

2) Über eine Klasse von Funktionen, welche der Gammafunktion ähnlich sind. *Leipziger Berichte* Bd. 46, p. 268—275; 1894.

Appell, P.: 1) Sur une classe de fonctions analogues aux fonctions Eulériennes étudiées par M. Heine. *Comptes rendus* Bd. 89, p. 841—844; 1879.

2) Sur une classe de fonctions qui se rattachent aux fonctions de M. Heine. *Comptes rendus* Bd. 89, p. 1031—1032; 1879.

3) Sur une classe de fonctions analogues aux fonctions Eulériennes. *Math. Annalen* Bd. 19, p. 84—102; 1881.

Barnes, E. W.: 1) The theory of the G-function. *Quarterly Journal* Bd. 31, p. 264—314; 1899.

2) The theory of the double gamma function. *London Math. Soc. Proceedings* Bd. 31, p. 358—381; 1899. *Royal Soc. of London Proceedings* Bd. 66, p. 265—266; 1900. *London Phil. Transactions* Bd. 196 A, p. 265—387; 1901.

Ciani, V.: Sopra una classe di funzioni analoghe alle funzioni euleriane. *Giorn. di mat.* Bd. 29, p. 68—86; 1891.

Glaisher, J. W. L.: 1) On the function that stands in the same relation to Bernoullian numbers that the gammafunction does to the factorials. *Rep. Brit. Assoc.* 1872.

2) On the product $1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdots n^n$. *Messenger* (2) Bd. 7, p. 43—47; 1877.

3) Products and series involving prime numbers only. *Quarterly Journal* Bd. 27, p. 270—337. 1894. Bd. 28, p. 97—174; 1895.

Hölder, O.: Über eine transzendente Funktion. *Göttinger Nachrichten* 1886, p. 514—522.

Kinkelin, H.: 1) Untersuchung über die Formel

$$nF(nx) = f(x) + f\left(x + \frac{1}{n}\right) + \cdots + f\left(x + \frac{n-1}{n}\right).$$

Grunert Archiv Bd. 22, p. 189—224; 1854.

2) Über eine mit der Gammafunktion verwandte Funktion und deren Anwendung auf die Integralrechnung. *Journal für Math.* Bd. 57, p. 122—138; 1860.

Mellin, H.: Om en ny klass af transcendenta funktioner, hvilka äro nära beslägtade med gammafunktionen. *Acta Soc. Fennicae* Bd. 14, p. 353—385; 1885.

Nielsen, N.: Om visse Generalisationer af den Prymske Funktion $P(x)$. *Nyt Tidsskrift for Math.* Bd. 11 B, p. 73—77, 1900.

Pincherle, S.: Sur une généralisation des fonctions Eulériennes. *Comptes rendus* Bd. 106, p. 265—268; 1888.

Schlömilch, O.: Über eine Verwandte der Gammafunktion. *Zeitschrift für Math. u. Physik* Bd. 25, p. 335—342; 1880.

Alphabetisches Register.

Autorennamen in Verbindungen wie z. B. Eulersche Integrale, Gaußsche Multiplikationsformel werden hier im Register nicht für sich zitiert. Unter „Funktion" findet man die spezielleren Funktionen aufgezeichnet, welche im Buche vorkommen.

Noten.

Seite 6. **Euler** hat seinen Annäherungswert für C auch in *Institutiones calculi differentialis* p. 444 publiziert; über seine noch früheren Veröffentlichungen dieses Wertes vergleiche man G. **Eneström** in *Bibliotheca Mathematica* 1905.

Seite 77. Die Formel (6) muß

$$\psi_n(n) = \frac{1}{2n+2} - \frac{\psi_n(0)}{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} \cdot \sum_{s=1}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s B_s}{2s} \cdot C_n^{n-2s+1}$$

lauten.

Die Formeln des § 30 sind schon von Nicole in *Mémoires de l'Académie de Paris* 1727, p. 361 ff. publiziert worden.

Seite 116. In seiner schönen Abhandlung *Sur les fonctions déterminantes*[1]) hat **Pincherle** bewiesen, daß das bestimmte Integral $\int_0^1 \varphi(t) t^{x-1} dt$, falls es für $x = \alpha$ konvergiert, für jeden endlichen Wert von x konvergieren muß, wenn $\Re(x) \geqq \Re(\alpha)$ vorausgesetzt wird. **Pincherle** setzt voraus, daß $\varphi(t)$ im Intervalle $0 < t < 1$ endlich und kontinuierlich ist. **Landau** hat mir brieflich einen einfachen Beweis für diesen Konvergenzsatz mitgeteilt, in dem er nur voraussetzt, daß das obengenannte Integral für $x = \alpha$ einen Sinn hat.

Seite 120. Die Formel (8) muß

$$h(t) = \int_0^t f(z) g(t-z) dz$$

lauten.

Seite 126. **Landau** hat mir brieflich einen Beweis dafür mitgeteilt, daß der Konvergenzbereich einer Binomialkoeffizientenreihe der endliche Teil einer Halbebene ist, welche rechts von einer gewissen geraden, auf der Achse der reellen Zahlen senkrecht stehenden Linie liegt. Es sei nun unsere Reihe für $\Re(x) > \lambda$ konvergent und für $\Re(x) > \lambda'$ unbedingt konvergent; dann ist immer $\lambda' \leqq \lambda + 1$.

Seite 127. **Pincherle** hat die notwendige und hinreichende Bedingung, welcher eine Funktion genügen muß, um in eine Binomialkoeffizientenreihe entwickelt werden zu können, in der obengenannten Arbeit[2]) publiziert.

---

1) Annales de l'École Normale (3) Bd. 22, p. 9—68; 1905; vergleiche p. 18 ff.

2) loc. cit. p. 65.

Seite 150. Die allgemeinen bestimmten Integrale, welche als Spezialfälle Zylinderfunktionen oder den Integrallogarithmus enthalten, sind sehr kompliziert. Dagegen habe ich in einer Arbeit, welche demnächst in *Monatshefte für Math. u. Physik* erscheint, bewiesen, daß die Funktion $Q_x(1-\nu)$, als Funktion von x betrachtet, in gewissen Integralgattungen eine ähnliche Rolle wie e^{-x} spielt.

Seite 197. Das verallgemeinerte Gaußsche Multiplikationstheorem ist früher von A. Winckler in der Abhandlung *Neue Theoreme zur Lehre von den bestimmten Integralen,* Wiener Berichte 1856, publiziert worden.

Seite 218. Lerch [1]) hat neuerdings andere Reihenentwicklungen für die Funktion $Q_a(x)$ mitgeteilt.

Seite 237. Über Fakultätenreihen vergleiche man auch die obengenannte schöne Abhandlung von Pincherle. [2])

Seite 245. Die Konvergenzbereiche einer Fakultätenreihe hat Landau, nach einer brieflichen Mitteilung, auch ganz elementar hergeleitet.

---

1) Journal für Mathematik, Bd. 130, p. 47—65; 1905.

2) loc. cit. p. 50.

Krazer, Dr. **Adolf,** Professor an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe, Lehrbuch der Thetafunktionen. Mit 10 Figuren im Text. [XXIV u. 512 S.] gr. 8. 1903. In Leinwand geb. n. *M.* 24.—

Neumann, Geh. Hofrat Dr. **Carl,** Professor an der Universität Leipzig, Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale. 2., vollständig umgearbeitete und wesentlich vermehrte Auflage. Mit zahlreichen Holzschnitten im Text und 1 lithogr. Tafel. [XIV u. 472 S.] gr. 8. 1884. geh. n. *M.* 12.—

——— über die nach Kreis-, Kugel- und Zylinderfunktionen fortschreitenden Entwicklungen, unter durchgängiger Anwendung des Du Bois-Reymondschen Mittelwertsatzes. [VIII u. 104 S.] gr. 4. 1881. geh. n. *M.* 7.20.

Neumann, Dr. **Franz,** weiland Professor der Physik und Mineralogie an der Universität Königsberg, Beiträge zur Theorie der Kugelfunktionen. I. und II. Abteilung. (In 1 Band.) [156 S.] gr. 4. 1878. geh. n. *M.* 8.—

——— Vorlesungen über mathematische Physik, gehalten an der Universität Königsberg. Herausgegeben von seinen Schülern in zwanglosen Heften. VI. Heft: Vorlesungen über die Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen. Herausgegeben von Geh. Hofrat Dr. Carl Neumann, Professor der Mathematik an der Universität Leipzig. Mit Figuren im Text. [XVI u. 364 S.] gr. 8. 1887. geh. n. *M.* 12.—

Nielsen, Dr. **Niels,** Privatdozent in Kopenhagen, Inspektor des mathematischen Unterrichts an den Gymnasien Dänemarks, Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen. [XIV u. 408 S.] gr. 8. 1904. In Leinwand geb. n. *M.* 14.—

——— Handbuch der Theorie der Gammafunktion. [X u. 326 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb.

Osgood, W. F., Professor an der Harvard-Universität, Cambridge, Mass., V. St. A., Lehrbuch der Funktionentheorie. In 2 Bänden. I. Band [ca. 480 S.] gr. 8. In Leinwand geb. [Erscheint Ende 1905.]

Pringsheim, Dr. **Alfred,** Professor an der Universität München, Vorlesungen über Zahlen- und Funktionenlehre. (Elementare Theorie der unendlichen Algorithmen und der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen.) I. Band: Zahlenlehre II. Band: Funktionenlehre. gr. 8. In Leinwand geb. [In Vorbereitung.]

Rausenberger, Dr. **Otto,** Professor an der Musterschule zu Frankfurt a. M., Lehrbuch der Theorie der periodischen Funktionen einer Variabeln mit einer endlichen Anzahl wesentlicher Diskontinuitätspunkte nebst einer Einleitung in die allgemeine Funktionentheorie. Mit Figuren im Text. [VIII u. 476 S.] gr. 8. 1884. geh. n. *M.* 10.80.

Riemann, Bernhard, gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlaß. Herausgegeben unter Mitwirkung von Richard Dedekind und Heinrich Weber. 2. Auflage, bearbeitet von Heinrich Weber. Mit dem Bildnis Riemanns. [X u. 558 S.] gr. 8. 1892. geh. n. *M.* 18.—

